Chap IV :

Produit scalaire

I. Définitions

Rappels :
- Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ alors $\|\vec{u}\| = AB$.
- Si $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormale et si $\vec{u}(x, y)$: $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- On note $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ l'angle orienté délimité par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Définition 1 : On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u}.\vec{v}$ le nombre réel défini par :

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)}$$

Remarque :
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
- On peut noter l'analogie avec la formule : $ab = \frac{1}{2}\left[(a+b)^2 - a^2 - b^2\right]$.
- En tant que tel cette définition sert peu en 1°S.

Remarque : Un produit scalaire de deux vecteurs est un *nombre*, pas un vecteur.

Théorème 1 : Si $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormale et si on a dans cette base $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ alors :

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'}$$

→ *démonstration* : $\overrightarrow{\vec{u}+\vec{v}}(x+x', y+y') \Rightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (x+x')^2 + (y+y')^2$. D'où $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

II. Propriétés

Propriété 1 : (Linéarité)

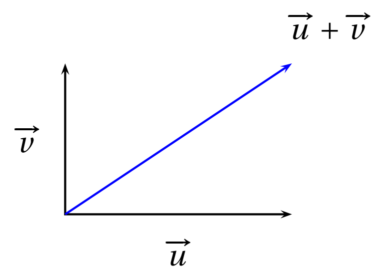
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :
- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- $(\lambda\vec{u}).\vec{v} = \lambda(\vec{u}.\vec{v}) = \vec{u}.(\lambda\vec{v})$

→ *démonstration* :
la première égalité se déduit immédiatement de la définition. La deuxième et la troisième égalité se montrent à l'aide du théorème 1.

Définition 2 : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$$

Remarque :
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$: $\vec{u}.\vec{v} = 0$ donc $\vec{u} \perp \vec{v}$.
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ ou $\vec{v} \neq \vec{0}$:
  On a $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2$ en notant $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.
  Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore : $(AB) \perp (BC)$. D'où la notation d'orthogonalité.

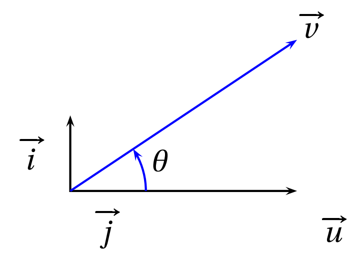


III. Autres expressions du produit scalaire

Théorème 2 : Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$:

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})}$$

→ *démonstration* :
Soit $(\vec{i},\vec{j})$ la base orthonormale définie par : $\vec{i} = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$, $\vec{j}$ tel que $\|\vec{j}\| = 1$ et $(\vec{i};\vec{j}) = \dfrac{\pi}{2}$.
Dans la base $(\vec{i},\vec{j})$, $\vec{u}$ a pour coordonnées $(\|\vec{u}\|;0)$ et $\vec{v}\,(\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u},\vec{v});\|\vec{v}\|.\sin(\vec{u},\vec{v}))$.
D'où $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u};\vec{v})$ d'après le théorème 1 .



Remarque : Si α est la mesure en radian de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$, et si θ_p est la mesure principale de $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$, on a : $\alpha = |\theta_p|$.

Donc $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \cos(\theta_p + 2k\pi) = \cos(\theta_p)$.

Or, $\cos(\alpha) = \begin{cases} \cos(\theta_p) & \text{si } \theta_p \geqslant 0 \\ \cos(-\theta_p) & \text{si } \theta_p \leqslant 0 \end{cases} = cos(\theta_p)$

Donc $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \cos\widehat{BAC}$. On a donc :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|.\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|.\cos\widehat{BAC}.$$

Définition 3 : $\vec{u}.\vec{u}$ est le carré scalaire de $\vec{u}$. On le note $\vec{u}^2$.

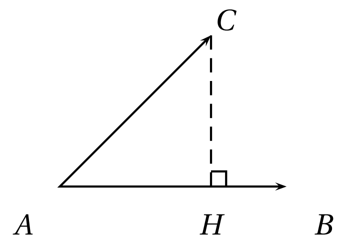
Théorème 3 : Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a : $\|\vec{u}^2\| = \vec{u}^2$.

→ *démonstration* : $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|.\|\vec{u}\|.\cos(\vec{u},\vec{u}) = \|\vec{u}\|.\|\vec{u}\|.\cos(0) = \|\vec{u}\|^2$.

Propriété 2 : Pour tous points A et B du plan, $\overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$.

Théorème 4 : Si H est la projection orthogonale de C sur (AB), $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$.

Et $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \begin{cases} AB.AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ ont même sens} \\ -AB.AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ ont sens contraire.} \end{cases}}$



→ *démonstration.*

IV. Applications du produit scalaire

1) Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale

Propriété 3 : Dans une base orthonormale $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, le vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées : $\left(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{i}\,;\, \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{j}\right)$.

→ *démonstration.*

2) Vecteur normal à une droite

Définition 4 : On dit qu'un vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal à une droite $\mathscr{D}$ si $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$ et si $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à la direction de $\mathscr{D}$.

Théorème 5 : Soit $\mathscr{D}$ une droite passant A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$. On a l'équivalence :

$$M \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{n}.\overrightarrow{AM} = 0.$$

Théorème 6 : Soit $\mathscr{D}$ une droite d'équation $ux + vy + w = 0$ dans un repère orthonormal $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Le vecteur $\overrightarrow{n}(u, v)$ est normal à $\mathscr{D}$.

→ *démonstration* : le vecteur $\overrightarrow{d}(-v, u)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. Il est bien orthogonal à $\overrightarrow{n}$.

3) Cercle

Théorème 7 : Dans un repère orthonormal, le cercle de centre $\Omega(x_0; y_0)$ et de rayon R a pour équation :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

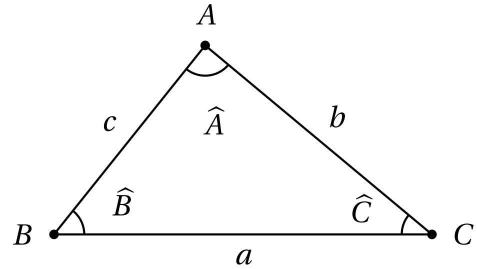
→ *démonstration* : $M(x; y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \Omega M = R \Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2$.

Théorème 8 : Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

→ *démonstration* :
Utiliser le fait qu'un triangle rectangle est inscriptible dans un demi-cercle de diamètre l'hypoténuse.

4) Relations dans le triangle



Théorème 9 : (Al-Kashi et Formule des sinus)

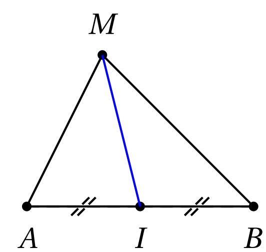
Avec les notations de la figure ci-dessus, si $\mathscr{S}$ désigne l'aire du triangle ABC :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\widehat{A}$$
$$b^2 = c^2 + d^2 - 2cd.\cos\widehat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\widehat{C}$$
et
$$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})} = \frac{abc}{2\mathscr{S}}.$$

→ *démonstration* :
$a^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = BA^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = c^2 + b^2 + 2cb\cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\right)$.
Or $\cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\right) = \cos\left(\pi + \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right) = -\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\cos(\widehat{A})$ d'où le résultat.
Pour la formule des sinus utiliser les hauteurs. (Il faut faire attention aux angles aigus et obtus.)

Remarque : On peut réécrire la formule des sinus comme suit :
$\mathscr{S} = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{A}) = \frac{1}{2}ac\sin(\widehat{B}) = \frac{1}{2}ab\sin(\widehat{C})$. (comme vu dans la démonstration.)

Théorème 10 : théorème de la médiane



Soient A et B deux points et I le milieu de $[AB]$.
Pour tout point M du plan on a
$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$.

→ *démonstration* : $MA^2 + MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$ et on développe ...

5) Lignes de niveau

Définition 5 : La ligne de niveau λ de l'application f est l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = \lambda$.
Quelques indications pour déterminer certaines lignes de niveau :

→ $f(M) = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u}$ Poser $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et construire H projeté orthogonal de M sur (AB).
→ $f(M) = MA^2 + MB^2$ Faire intervenir I milieu de $[AB]$.
→ $f(M) = MA^2 - MB^2$ Faire intervenir I milieu de $[AB]$.
→ $f(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ Faire intervenir I milieu de $[AB]$.

6) Trigonométrie

Rappels : On a pour tout réel a : $\left\{\begin{array}{llll} \cos(-a) = \cos(a) & & \sin(-a) = -\sin(a) \\ \cos(\pi - a) = -\cos(a) & & \sin(\pi - a) = \sin(a) \\ \cos(\pi + a) = -\cos(a) & & \sin(\pi + a) = -\sin(a) \\ \cos(\frac{\pi}{2} - a) = \sin(a) & & \sin(\frac{\pi}{2} - a) = \cos(a) \\ & \cos^2(a) + \sin^2(a) = 1 & & \end{array}\right.$

Propriété 4 : Pour tous a et b réels on a :

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b. \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b. \end{array}}$$

→ *démonstration* :
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires dans une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j})$ tels que $(\vec{i}, \vec{u}) = a$ et $(\vec{i}, \vec{v}) = b$.
On a : $\vec{u} = \cos a\, \vec{i} + \sin a\, \vec{j}$ et $\vec{v} = \cos b\, \vec{i} + \sin b\, \vec{j}$. Donc $\vec{u}.\vec{v} = (\cos a\, \vec{i} + \sin a\, \vec{j}).(\cos b\, \vec{i} + \sin b\, \vec{j}) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
De plus, $(\vec{u};\vec{v}) = (\vec{i};\vec{v}) - (\vec{i};\vec{u}) = a - b$. Donc $(\vec{u};\vec{v}) = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos(\vec{u};\vec{v}) = \cos(a-b)$ ce qui nous donne la première formule.
En remplaçant a par $\frac{\pi}{2} - a$, on obtient la deuxième.

A partir de ces formules, on déduit les suivantes :

Propriété 5 : Pour tous a et b réels on a :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos(a-b) & = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \cos(a+b) & = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a-b) & = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \sin(a+b) & = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(2a) & = 2 \sin a \cos a \\ \cos(2a) & = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a. \end{array}}$$

7) Equations trigonométriques (HP)

Pour la résolution des équations du type $\cos(x) = \cos(a)$ et $\sin(x) = \sin(a)$ on a :

$$\boxed{\begin{array}{lll} \cos x = \cos \alpha & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z} \\ \sin x = \sin \alpha & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}}$$