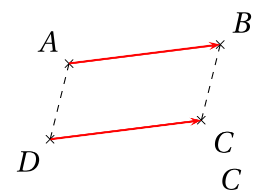
Chap II : **Vecteurs et barycentres**

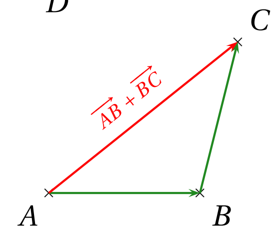
I. Vecteurs

1) Définitions

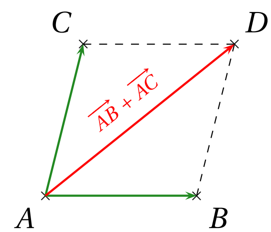
Définition 1 : Un vecteur $\overrightarrow{u}$ est défini par une direction, un sens et une longueur (appelée norme).
La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la longueur AB .
Elle est notée $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$. Ainsi $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$.



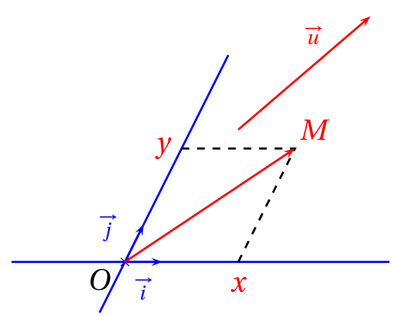
Propriété 1 : Lorsque les points A, B, C et D, ne sont pas alignés, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff ABCD$ est un parallèlogramme.



Définition 2 : Relation de Chasles : On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Remarque : « Règle du parallélogramme » : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.



Définition 3 : Dire que $(x\,;\,y)$ sont les coordonnées (uniques) du point M dans le repère $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j}\right)$ signifie que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$. On note : $M(x\,;\,y)$. Les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ sont celles du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$. On note : $\overrightarrow{u}\,(x\,;\,y)$.

Remarque : Ainsi, dire que les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans le repère $\left(O\,;\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j}\right)$ sont $(x\,;\,y)$ signifie que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$. (On dit aussi que $(x\,;\,y)$ sont les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base $\left(\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j}\right)$).

2) Colinéarité

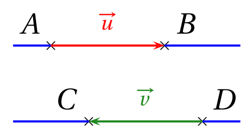
Définition 4 : Lorsque le vecteur $\overrightarrow{u}$ et le nombre k sont non nuls, le vecteur $k\overrightarrow{u}$ a :

- même direction que $\overrightarrow{u}$,
- même sens que $\overrightarrow{u}$ si $k > 0$ et sens contraire si $k < 0$.
- pour norme le réel : $|k| \times \left\|\overrightarrow{u}\right\|$.

Remarque : Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

ATTENTION, la « multiplication » et la « division » entre vecteurs n'est pas définie.

Définition 5 : Dire que deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires signifie qu'ils ont la même direction, c'est-à-dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.



On peut également dire que deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.
Remarque : Par *convention*, le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur.

Propriété 2 :

- Dire que trois points distincts A, B et C sont alignés équivaut à dire qu'il existe un nombre k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.
- Dire que deux droites (AB) et (CD) sont parallèles équivaut à dire qu'il existe un nombre k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.

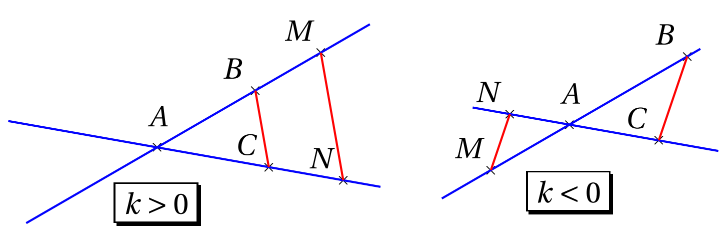
On peut caractériser la colinéarité avec les coordonnées.

Propriété 3 : Dire que $\overrightarrow{u}\,(x\,;\,y)$ et $\overrightarrow{v}\,(x'\,;\,y')$ sont colinéaires équivaut à dire que $xy' - yx' = 0$.

(Forme vectorielle du théorème de Thalès)

Théorème 1 : Soit ABC un triangle. M sur (AB) et N sur (AC).

- Si (MN) est parallèle à (BC) soit k le nombre tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$. alors $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BC}$.

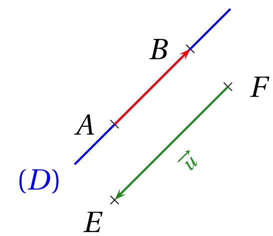


- **(Réciproque)** S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$, alors (MN) et (BC) sont parallèles.

3) Vecteurs directeurs et équations de droites

Définition 6 : Un vecteur directeur d'une droite (D) est un vecteur dont la direction est celle de (D).

En particulier, $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) et tous les vecteurs directeurs de cette droite sont les vecteurs $k\overrightarrow{AB}$, où k est un réel non nul.



Propriété 4 : Toute droite (D) est **caractérisée** par une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$, avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, Le vecteur $\vec{u}\,(-b\,;\,a)$ est alors un vecteur directeur de (D).

Propriété 5 : Toute droite **non parallèle à l'axe des ordonnées** a une équation réduite de la forme : $y = mx + p$.

Propriété 6 :
- Dire que les droites d'équations $y = mx+p$ et $y = m'x+p'$ sont parallèles équivaut à dire que $m = m'$.
- Dire que les droites d'équations $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ sont parallèles équivaut à dire que $ab' - a'b = 0$.

II. Barycentre

1) Barycentre de deux points

La notion mathématique de barycentre est intuitivement très proche de la notion physique de centre de gravité.

Théorème 2 : Soient A et B deux points du plan $\mathscr{P}$, α et β deux réels.
Lorsque $\alpha + \beta \neq 0$, il existe un unique point G tel que :

$$\alpha\,\overrightarrow{GA} + \beta\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}\,.$$

Ce point est appelé barycentre des deux points pondérés $(A;\alpha)$ et $(B;\beta)$.
On note $G = \mathrm{bar}\left\{(A,\alpha)\,;(B,\beta)\right\}$.
Si $\alpha = \beta \neq 0$ (et notamment $\alpha = \beta = 1$) , on dit que G est l' isobarycentre de A et B.

$\longrightarrow$ *démonstration*

Remarque : L'isobarycentre de A et B est le milieu de $[AB]$, c'est le point I tel que $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Théorème 3 : Soient α et β tels que $\alpha + \beta \neq 0$ et soient A et B deux points du plan $\mathscr{P}$,
$G = \mathrm{bar}\left\{(A,\alpha)\,;(B,\beta)\right\} \iff \forall M \in \mathscr{P},\ \alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} = (\alpha+\beta)\,\overrightarrow{MG}$.

$\longrightarrow$ *démonstration*

Propriété 7 : Le barycentre de $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$ est situé sur la droite (AB).

Remarque : Si α et β sont de même signe, $G\in[AB]$.
Si α et β sont de signes contraires, $G\notin[AB]$.
Si $|\alpha|>|\beta|$ alors G est plus près de A que de B.

⟶ Penser à l'équilibre d'une barre avec une masse à chaque bout.

Remarque : $\forall k\in\mathbb{R}^*$: $G=\text{bar}\{(A,\alpha);(B,\beta)\}=\text{bar}\{(A,k\alpha);(B,k\beta)\}$.

Théorème 4 : Soit G le barycentre du système $\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$ dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
Si $A(x_A;y_A)$ et si $B(x_B;y_B)$ alors les coordonnées de G dans ce repère sont :

$$G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta};\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}\right).$$

⟶ *démonstration*

2) Barycentre de trois points

Théorème 5 : Soient A, B et C trois points du plan $\mathscr{P}$, α, β et γ trois réels tels que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.
Il existe un unique point G tel que :

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}.$$

Ce point est appelé barycentre des trois points pondérés $(A;\alpha)$, $(B;\beta)$ et $(C;\gamma)$.
On note $G=\text{bar}\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$.
Si $\alpha=\beta=\gamma\neq 0$, on dit que G est l'isobarycentre de A; B et C.

Théorème 6 : Soient α, β et γ tels que $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ et soient A, B et C trois points du plan $\mathscr{P}$,
$G=\text{bar}\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}\Leftrightarrow\forall M\in\mathscr{P},\ \alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$.

Remarque : $\forall k\in\mathbb{R}^*$: $G=\text{bar}\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}=\text{bar}\{(A,k\alpha);(B,k\beta);(C,k\gamma)\}$.

Remarque : *Par définition* le centre de gravité G d'un triangle ABC est l'isobarycentre des points A, B et C. On a donc : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Théorème 7 : (barycentre partiel)

$$\left\{\begin{array}{lcl} G&=&\text{bar}\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}\\ H&=&\text{bar}\{(A,\alpha);(B,\beta)\}\end{array}\right.\Leftrightarrow G=\text{bar}\{(H,\alpha+\beta);(C,\gamma)\}.$$

⟶ *Penser à l'équilibre d'une barre en T avec une masse à chaque bout.*
⟶ *démonstration*

Théorème 8 : Soit G le barycentre du système $\{(A;\alpha);(B;\beta);(C;\gamma)\}$ dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
Si $A(x_A\,;\,y_A)$, $B(x_B\,;\,y_B)$ et $C(x_C\,;\,y_C)$ alors les coordonnées de G dans ce repère sont :

$$G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}\,;\,\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right).$$

$\longrightarrow$ *démonstration*

3) Barycentre de n points (HP)

On peut généraliser à un nombre plus grand de points la notion de barycentre. Les propriétés resteront alors similaires.
Dans toute la suite n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Théorème 9 : Soient A_1, A_2, ..., A_n n points du plan $\mathscr{P}$, α_1, α_2, ..., α_n n réels tels que $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\neq 0$. Il existe un unique point G tel que :

$$\alpha_1\overrightarrow{GA_1}+\alpha_2\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}.$$

Ce point est appelé barycentre des n points pondérés $(A_1;\alpha_1)$, $(A_2;\alpha_2)$, ..., $(A_n;\alpha_n)$.
On note $G=\mathrm{Bar}\{(A_1;\alpha_1),(A_2;\alpha_2),\ldots,(A_n;\alpha_n)\}$.

Théorème 10 : Soient α_1, α_2, ..., α_n tels que $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\neq 0$ et soient A_1, A_2, ..., A_n n points du plan $\mathscr{P}$,il y a équivalence entre
$G=\mathrm{Bar}\{(A_1;\alpha_1),(A_2;\alpha_2),\ldots,(A_n;\alpha_n)\}$
et
$\forall M\in\mathscr{P},\ \alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2\overrightarrow{MA_2}+\cdots+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}=(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)\overrightarrow{MG}.$

Théorème 11 : Soit G le barycentre du système $\{(A_1;\alpha_1),(A_2;\alpha_2),\ldots,(A_n;\alpha_n)\}$ dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
Si $A_1(x_{A_1}\,;\,y_{A_1})$, $A_2(x_{A_2}\,;\,y_{A_2})$, ..., $A_n(x_{A_n}\,;\,y_{A_n})$ alors les coordonnées de G dans ce repère sont :

$$G\left(\frac{\alpha_1x_{A_1}+\alpha_2x_{A_2}+\cdots+\alpha_nx_{A_n}}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\,;\,\frac{\alpha_1y_{A_1}+\alpha_2y_{A_2}+\cdots+\alpha_ny_{A_n}}{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\right).$$