Chap 9 :

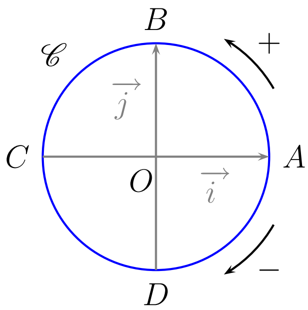
Trigonométrie

I. Le cercle trigonométrique

1) Définition

On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(O\,;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.

Définition 1 : On appelle cercle trigonométrique le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1, muni d'un sens de parcours (sens inverse des aiguilles d'une montre).
Le sens de parcours est appelé sens trigonométrique.



On peut associer à tout réel x ***un point et un seul*** de $\mathscr{C}$:

- **Si $x \geqslant 0$:** on imagine une corde de longueur x. On fixe une extrémité en A et on enroule la corde dans le sens trigonométrique. On appelle M l'autre extrémité de la corde sur le cercle.

  Exemple : Le cercle a pour périmètre ..., donc si $x = 2\pi$: M est en ....
  Si $x = 4\pi$, M est en ...;
  Si $x = \pi$, M est en ...;
  Si $x = \dfrac{\pi}{2}$, M est en ....

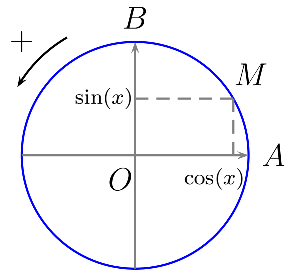
- **Si $x \leqslant 0$:** on réalise la même chose mais en enroulant la corde dans le sens négatif.

  Exemple : Si $x = -\dfrac{\pi}{2}$, M est en ...;
  Si $x = -2\pi$, M est en ....

2) Cosinus et sinus d'un réel x

On se place dans le repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$ muni du cercle trigonométrique.
A tout réel x on associe le point M du cercle.

Définition 2 :
- Le cosinus de x, noté $\cos(x)$, est l'abscisse de M.
- Le sinus de x, noté $\sin(x)$, est l'ordonnée de M.



Remarque : D'après le graphique précédent on a pour tout x réel :
$\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$ et $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$.

De l'égalité $OM^2 = 1$ on peut tirer la propriété suivante :

Proposition 1 : Pour tout réel x on a : $\left(\cos(x)\right)^2 + \left(\sin(x)\right)^2 = 1$.

II. Les radians

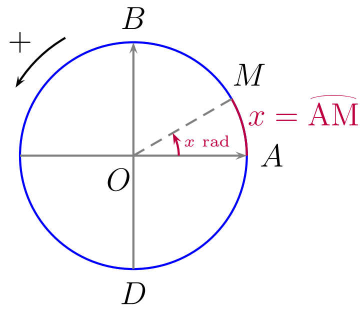
1) Définition

Les définitions de cosinus et sinus que nous venons de voir sont ***compatibles*** avec les définitions de cosinus et sinus d'un angle vu au collège.

Il suffit pour cela de prendre une autre unité que le degré pour mesurer les angles : *le radian.*
On note alors les mesures en rad.

Définition 3 : A tout réel x de $[0; 2\pi[$ on associe le point M du cercle trigonométrique.
La mesure en radians de l'angle $\widehat{AOM}$ est x rad.

Exemple : Si M est en B on a $\widehat{AOM}$ =... rad;
Si M est en A on a $\widehat{AOM}$ =... rad;
Si M est en D on a $\widehat{AOM}$ =... rad.



Proposition 2 : Il y a un lien entre la mesure d en degrés d'un angle et la mesure α de ce même angle en radians:

$$\alpha = \frac{\pi d}{180}.$$

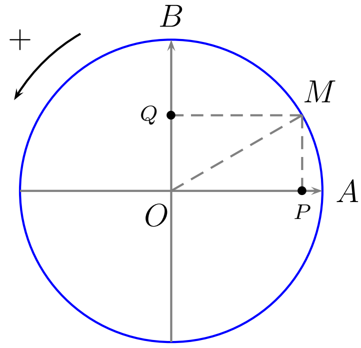
Remarque : Cette propriété signifie juste qu'il y a proportionnalité entre les degrés et les radians, il suffit donc de se rappeler que $\boxed{\pi \text{ rad} = 180^\circ}$.

La correspondance entre certaines mesures en degré et en radians est à connaître, en voici le tableau :

mesure en degrés	30°			120°	135°
mesure en radians	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$		

2) Correspondance des définitions

On considère le point M du cercle trigonométrique associé au nombre réel x comme dans le dessin ci-dessous :



- Avec la définition du collège on a, dans le triangle OPM rectangle en P :
  $\cos\left(\widehat{AOM}\right) = \frac{OP}{OM} = OP$ car $OM = 1$ puisque le cercle est de rayon 1.
- Avec la définition du collège on a, dans le triangle OMQ rectangle en Q :
  $\sin\left(\widehat{AOM}\right) = \frac{OQ}{OM} = OP$.
- Avec la définition de seconde on a $\cos(x) = OP$,
- Avec la définition de seconde on a $\sin(x) = OQ$,

On a donc bien $\cos(x) = \cos\left(\widehat{AOM}\right)$.

On a donc bien $\sin(x) = \sin\left(\widehat{AOM}\right)$.

III. Les fonctions sinus et cosinus

1) La fonction $f : x \longmapsto \cos(x)$

1. Ensemble de définition

La fonction f est définie pour tout x réel. Son ensemble de définition est donc ....

2. Périodicité

Proposition 3 : Pour tout réel x : $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$.

Définition 4 : On dit que la fonction f est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

3. Parité

Proposition 4 : La fonction cosinus est paire c'est-à-dire que pour tout réel x on a :

$$\cos(-x) = \ldots\ldots$$

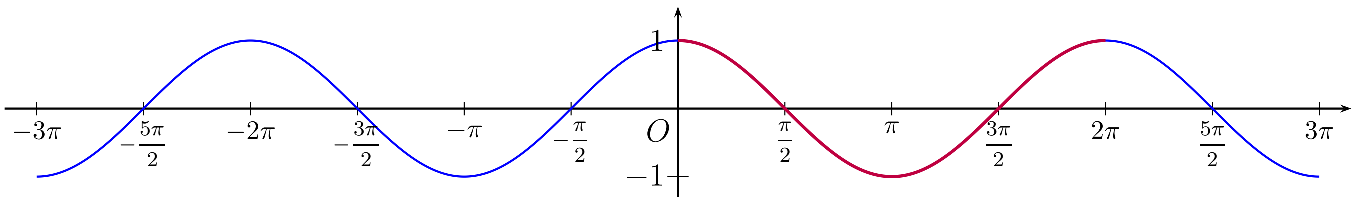
4. Tableau de variation

Puisque la fonction f est 2π-périodique, il suffit de déterminer ces variations sur $[0; 2\pi[$.

x	0	π	2π
$f(x)$			

5. Courbe représentative

Grâce aux renseignements précédents on peut tracer la courbe représentative de f :



Remarque : On voit bien sur la courbe la parité et la périodicité de la fonction cosinus.

Proposition 5 : On voit que pour tout x réel : $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.

2) La fonction $f : x \longmapsto \sin(x)$

1. Ensemble de définition

La fonction f est définie pour tout x réel. Son ensemble de définition est donc ....

2. Périodicité

Proposition 6 : Pour tout réel x : $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$

Remarque : La fonction f est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ comme la fonction cos.

3. Parité

Proposition 7 : La fonction sinus est impaire c'est-à-dire que pour tout réel x on a :

$$\sin(-x) = \ldots\ldots$$

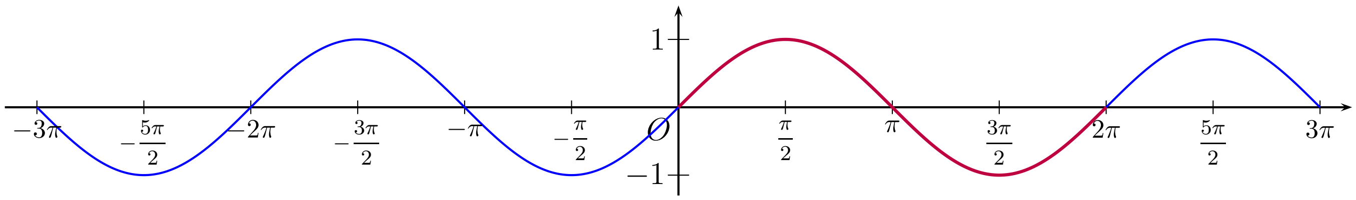
4. Tableau de variation

Puisque la fonction f est 2π-périodique, il suffit de déterminer ces variations sur $[0; 2\pi[$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$				

5. Courbe représentative

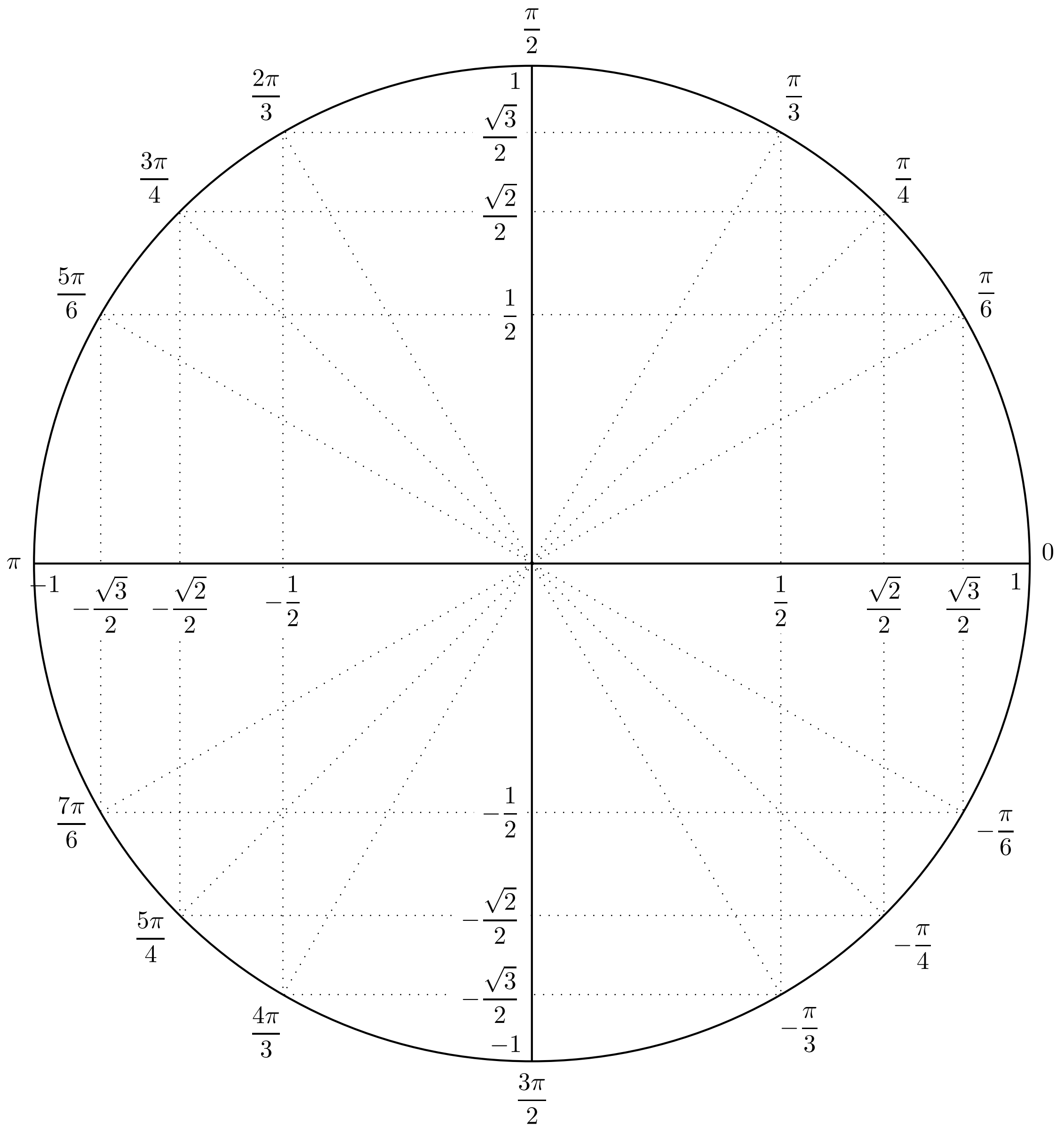
Grâce aux renseignements précédents on peut tracer la courbe représentative de f :



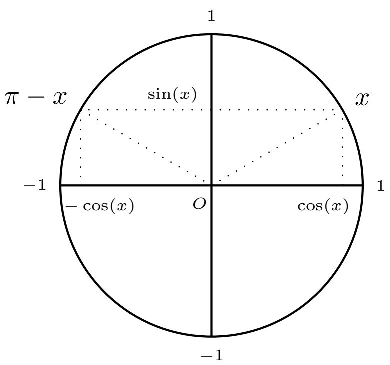
Remarque : On voit bien sur la courbe la parité et la périodicité de la fonction sinus.

Proposition 8 : On voit que pour tout x réel : $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$.

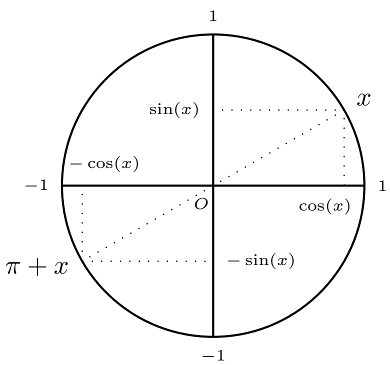
IV. Valeurs remarquables et cercle trigonométrique



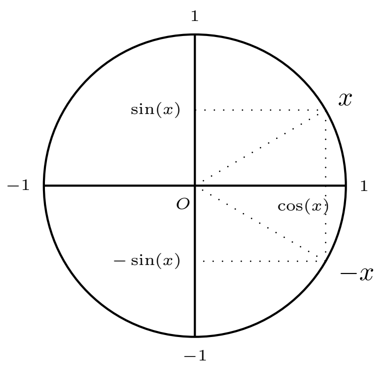
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



$$\begin{cases} \cos(\pi - x) & = -\cos(x) \\ \sin(\pi - x) & = \sin(x) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \cos(\pi + x) & = -\cos(x) \\ \sin(\pi + x) & = -\sin(x) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \cos(-x) & = \cos(x) \\ \sin(-x) & = -\sin(x) \end{cases}$$