Chap 9 :

Transformations du plan et de l'espace

*Les définitions et propriétés sont **valides** aussi bien **dans le plan que dans l'espace**.*

I. Définitions

Définition 1 : On appelle transformation du plan (ou de l'espace) toute fonction bijective du plan (ou de l'espace),
c'est-à-dire que tout point du plan (ou de l'espace) possède ***un et un seul*** antécédent par cette fonction.

Remarque : une projection sur une droite du plan n'est pas une transformation du plan.

Définition 2 : Si f est une transformation du plan (ou de l'espace), la transformation réciproque de f est la transformation notée f^{-1} qui, à tout point du plan (ou de l'espace), associe son unique antécédent par f.

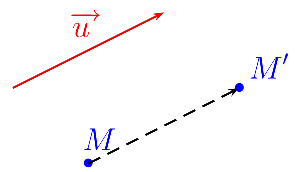
$$M' = f(M) \Longleftrightarrow M = f^{-1}(M').$$

Voici les caractéristiques de quelques transformations du plan et de l'espace :

1) Translations

Définition 3 : Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est la transformation du plan (ou de l'espace) notée $t_{\overrightarrow{u}}$ définie par :

$$M' = t_{\overrightarrow{u}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}.$$



Remarque : La translation de vecteur nul $t_{\overrightarrow{0}}$ est l'application identité $Id : M \mapsto M$.

Proposition 1 : Si $M' = t_{\overrightarrow{u}}(M)$ et $N' = t_{\overrightarrow{u}}(N)$ alors $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.
$\longrightarrow$ *démonstration*

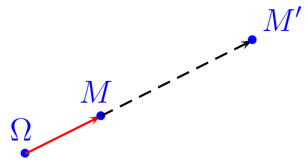
Théorème 1 : La transformation réciproque de $t_{\overrightarrow{u}}$ est $t_{-\overrightarrow{u}}$.
$\longrightarrow$ *démonstration*

2) Homothétie

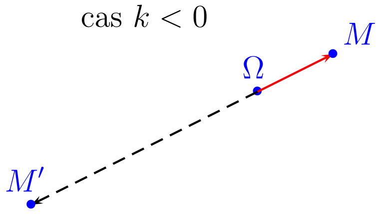
Définition 4 : Soit Ω un point du plan et soit $k \in \mathbb{R}^*$.
L'homothétie de centre Ω et de rapport k est la transformation du plan (ou de l'espace) notée $h_{\Omega\,;\,k}$ définie par :

$$M' = h_{\Omega\,;\,k}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\ \overrightarrow{\Omega M}\ .$$

cas $k > 0$



cas $k < 0$

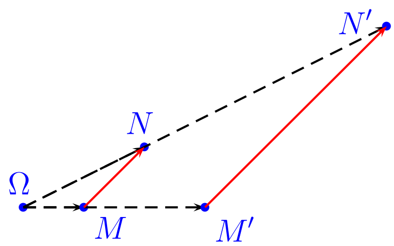


Remarque : $h_{(\omega;1)} = Id$.

Proposition 2 : Si $M' = h_{\Omega\,;\,k}(M)$ et $N' = h_{\Omega\,;\,k}(N)$ alors

$$\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}.$$

$\longrightarrow$ *démonstration*



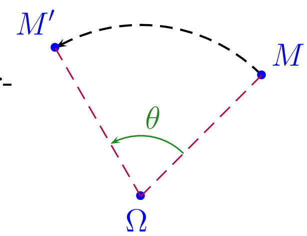
Théorème 2 : La transformation réciproque de $h_{\Omega\,;\,k}$ est : $h_{\Omega\,;\,\frac{1}{k}}$.

3) Rotations et réflexions dans le plan (HP)

ATTENTION : les rotations sont des transformations du *plan*.

Définition 5 : Soit Ω un point du plan et θ un nombre réel.
On appelle rotation de centre Ω et d'angle θ la transformation du plan notée $r_{\Omega\,;\,\theta}$ définie par :

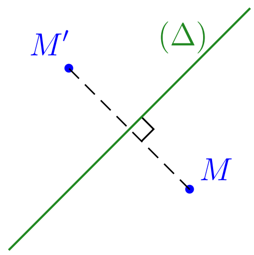
$$M' = r_{\Omega\,;\,\theta}(M) \Longleftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \quad \text{et} \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}\ ;\ \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta \end{cases}$$



Remarque : Les symétries centrales sont des rotations d'angle π.

Définition 6 : Soit Δ une droite du plan (ou de l'espace).
On appelle réflexion d'axe Δ la transformation notée s_Δ définie par :

$$M' = s_\Delta(M) \iff \begin{cases} M' = M \text{ si } M \text{ est sur } \Delta \\ \text{ ou bien} \\ \Delta \text{ est la médiatrice de } [MM'] \end{cases}$$



Proposition 3 : On peut déterminer les transformations réciproques des rotations et réflexions :

- La transformation réciproque de $r_{\Omega\,;\,\theta}$ est : $r_{\Omega\,;\,-\theta}$.
- La transformation réciproque de s_Δ est : s_Δ .

$\longrightarrow$ *démonstration*

4) Points invariants

Définition 7 : On appelle point invariant d'une transformation f tout point M du plan (ou de l'espace) invariant par f c'est-à-dire tel que $f(M) = M$.

Proposition 4 : On sait déterminer les points invariants des transformations décrites au dessus :

- Les translations, autres que Id, n'ont pas de points invariants.
- Les homothéties, autres que Id, n'ont qu'un seul point invariant : leur centre Ω.
- Les rotations, autres que Id, n'ont qu'un seul point invariant : leur centre Ω.
- Les réflexions ont pour point invariants les points de leur axe Δ.

$\longrightarrow$ *démonstration*

II. Propriétés des translations et des homothéties

Dans cette partie on s'intéresse aux propriétés géométriques liées aux translations et aux homothéties. Ainsi dans toute cette partie f désigne une translation ou une homothétie.

1) Propriétés de conservation

Proposition 5 : conservation de l'alignement
Les images par f de trois points alignés sont trois points alignés.
$\longrightarrow$ *démonstration*

Proposition 6 : conservation du barycentre
Soient G, A et B trois points avec $G = \text{bar}\left\{(A,a),(B,b)\right\}$ et $a+b \neq 0$,
G', A' et B' leurs images respectives par f alors $G' = \text{bar}\left\{(A',a),(B',b)\right\}$.
$\longrightarrow$ *démonstration*

Remarque : La propriété est encore vraie pour un barycentre de n (quelconque) points pondérés.

Remarque : f conserve notamment les milieux (car un milieu est un isobarycentre).

Proposition 7 : conservation des angles orientés
Soient A, B et C trois points d'images respectives A', B' et C' par f.
Les angles orientés $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{A'B'}\ ;\ \overrightarrow{A'C'}\right)$ ont alors la même mesure.
$\longrightarrow$ *démonstration*

2) Images de figures

Proposition 8 : *Image d'un segment*
L'image par f du segment $[AB]$ est le segment parallèle $[A'B']$ où $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$.
$\longrightarrow$ *démonstration*

Proposition 9 : *Image d'une droite*
L'image par f de la droite (AB) est la droite parallèle $(A'B')$ où $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$.
$\longrightarrow$ *démonstration*

Proposition 10 : *Image d'un cercle*
L'image par f du cercle de centre A et de rayon r est le cercle de centre A' où $A' = f(A)$ et de rayon r'.
On a $r' = r$ si f est une translation.
On a $r' = |k|r$ si f est une homothétie de rapport k.
$\longrightarrow$ *démonstration*

Remarque : Avec les propriétés de conservation et les images de figure simples on obtient les images de figures géométriques plus compliquées :
l'image d'un parallélogramme est un parallélogramme,
l'image d'un « point de contact » (entre un cercle et une droite, entre deux cercles, ...) est un point de contact.

3) Effet sur les longueurs, les aires et les volumes

Proposition 11 :
- Une translation conserve les longueurs, les aires et les volumes.
- Une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par $|k|$, les aires par $|k|^2$ et les volumes par $|k|^3$.

$\longrightarrow$ *démonstration admise*