

Suites numériques

I. Vocabulaire et définitions

Le vocabulaire des suites est à très proche de celui des fonctions. En effet, au niveau de la théorie, les suites et les fonctions sont les deux facettes d'un même objet mathématique.

1) Définitions

Définition 1 : Une suite numérique u est une application de \mathbb{N} dans \mathbb{R} $u : \begin{matrix} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto u_n \end{matrix}$.

La suite u est souvent notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou plus simplement (u_n) .

Remarque : u_0 est appelé le premier terme, u_1 le deuxième terme et de manière générale u_n est appelé le $(n + 1)$ -ième terme.

Définition 2 : En général, une suite est définie :

- Soit de manière explicite (on peut calculer u_n en fonction de n)

Exemple : $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

Cas particulier : $u_n = f(n)$ avec f une fonction connue.

Exemple : $u_n = \sqrt{n}$.

- Soit par récurrence (on calcule u_n de proche en proche)

Exemple : $u_0 = 2$ est donné et $u_{n+1} = 2u_n - 1$ pour tout n , alors on peut calculer les termes $u_1 = 3, u_2 = 5 \dots$

2) Sens des variations

Définition 3 :

- (u_n) est croissante si et seulement si, pour tout entier n : $u_{n+1} \geq u_n$.
- (u_n) est décroissante si et seulement si pour tout entier n : $u_{n+1} \leq u_n$.
- (u_n) est monotone si et seulement si (u_n) est croissante ou décroissante.

Il existe plusieurs méthodes pour déterminer le sens de variation (éventuel) d'une suite (u_n) :

Méthodes Pour étudier les variations d'une suite (u_n) , on peut :

- Comparer u_{n+1} et u_n .
- Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- Si $u_n > 0$ pour tout n , comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1.
- Si $u_n = f(n)$, utiliser les variations de $x \mapsto f(x)$.

3) Suites bornées

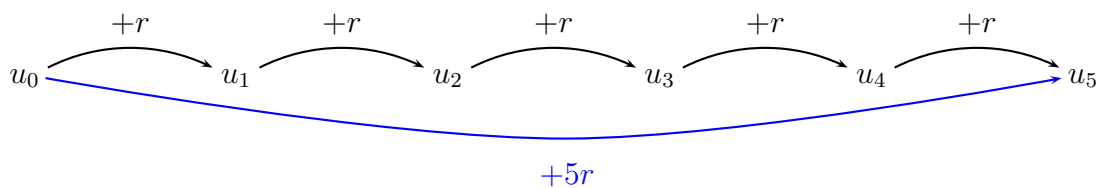
Définition 4 :

- (u_n) est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier n : $u_n \leq M$.
- (u_n) est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier n : $u_n \geq m$.
- (u_n) est **bornée** si (u_n) est à la fois majorée et minorée.

II. Suites arithmétiques

1) Définition

Définition 5 : On appelle **suite arithmétique** toute suite (u_n) telle que pour tout entier n on ait $u_{n+1} - u_n$ constant et on note souvent r cette constante. r est appelé la **raison** de la suite.



Exemple : La suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 2$ est arithmétique.

Proposition 1 : En fait si la suite (u_n) est arithmétique de premier terme u_0 et de raison r on a pour tout n : $u_n = u_0 + nr$.
 —→ démonstration avec le « raisonnement par récurrence ».

Proposition 2 : Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r alors :

- si $r < 0$, la suite (u_n) est une suite décroissante;
- si $r = 0$, la suite est constante;
- si $r > 0$, la suite (u_n) est une suite croissante.

→ démonstration

2) Somme de termes consécutifs

Théorème 1 : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .

On définit S_n par $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

On a alors : $S_n = (n+1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$.

→ démonstration

Remarque : On peut réécrire cette formule « en français » :

$$S_n = (\text{nb de termes}) \times \frac{1^{\text{er}} \text{terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

Exemple : On a l'exemple fondamental : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

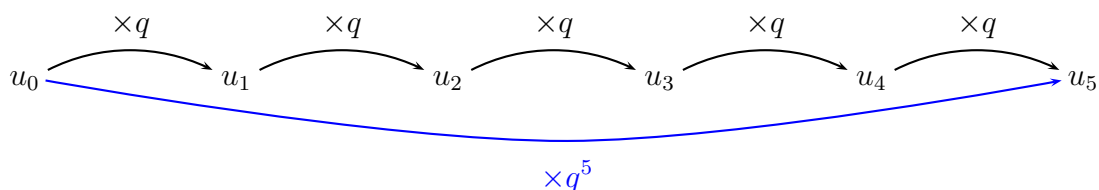
III. Suites géométriques

1) Définition

Définition 6 : On appelle **suite géométrique** toute suite (v_n) telle que pour tout entier n on ait

$$v_{n+1} = q \times v_n.$$

q est appelé la **raison** de la suite.



Exemple : La suite (u_n) définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = -2u_n$ est géométrique.

Proposition 3 : En fait si la suite (v_n) est géométrique de premier terme v_0 et de raison q on a pour tout n : $v_n = v_0 q^n$.
 —→ démonstration avec le « raisonnement par récurrence ».

Proposition 4 : Si (v_n) est une suite géométrique de raison q alors :

- si $q > 1$: la suite (v_n) est une suite décroissante si $v_0 < 0$
 et (v_n) est une suite croissante si $v_0 > 0$;
- si $0 < q < 1$: la suite (v_n) est une suite croissante si $v_0 < 0$
 et (v_n) est une suite décroissante si $v_0 > 0$;
- sinon la suite (v_n) n'est ni croissante ni décroissante.

—→ démonstration

2) Somme de termes consécutifs

Théorème 2 :

Soit (v_n) une suite géométrique de raison q .

On définit $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} + v_n = \sum_{k=0}^n v_k$.

On a alors : $S_n = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

—→ démonstration

Remarque : On peut réécrire cette formule « en français » :

$$S_n = (\text{1^{er} terme}) \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nb de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

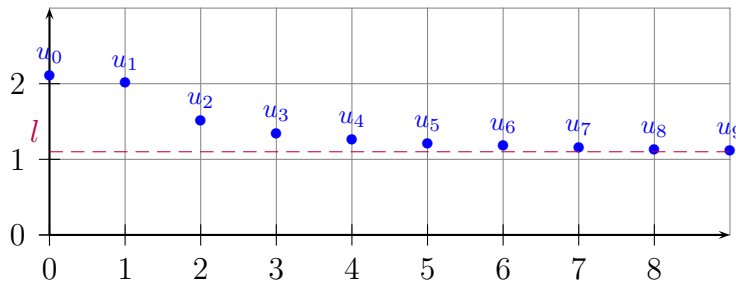
Exemple : On a par exemple : $1 + 2 + \dots + 2^n = 1 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1$.

IV. Limites et convergence des suites

1) Définition

Définition 7 : On dit qu'une suite (u_n) est **convergente** vers un nombre l si elle admet l comme limite quand n tend vers $+\infty$, on note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Dans le cas contraire on dit que la suite (u_n) est **divergente** (si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$ ou si la suite (u_n) n'a pas de limite.)



On peut donner pour les suites une définition « rigoureuse » de la notion de limite :

Définition 8 : Pour l un nombre réel.

On dit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Définition 9 : De manière analogue on peut dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ si tout intervalle du type $]a; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Remarque : Les théorèmes sur la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient énoncés pour les fonctions restent valables pour toutes les suites.

2) Propriétés

Théorème 3 : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[b; +\infty[$ et soit (u_n) définie par $u_n = f(n)$, alors :

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ alors (u_n) converge vers l .

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

→ démonstration admise

Exemple : On a par exemple $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n^3 = -\infty$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Proposition 5 : Si une suite (u_n) est croissante :

- si (u_n) est majorée alors la suite est convergente. (admis)
- si (u_n) n'est pas majorée alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et la suite est divergente.

→ démonstration

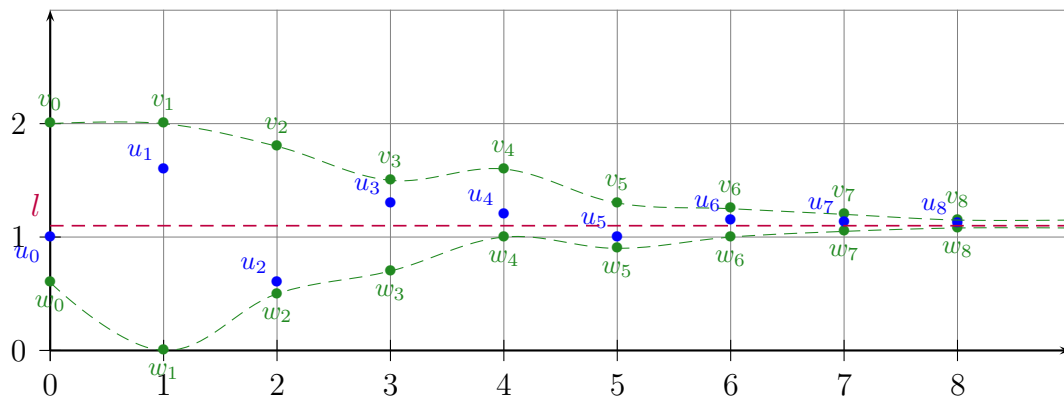
Remarque : On a la propriété équivalente pour les suites décroissantes.

Théorème 4 : Théorème des gendarmes

On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) et un nombre l tels que, à partir d'un certain rang, on ait $v_n \leq u_n \leq w_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$.

On a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

→ démonstration



3) Cas des suites géométriques

Théorème 5 : On considère une suite géométrique (v_n) de premier terme v_0 non nul (sinon la suite est toujours nulle) et de raison q .

- si $q > 1$ et $v_0 > 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$;
- si $q > 1$ et $v_0 < 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$;
- si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$;
- et si $q = 1$ (v_n) est constante égale à v_0 et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = v_0$.

→ démonstration en exercice.