Chap 7 :

Produit scalaire

I. Définitions

Rappels :
- Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ alors $\| \overrightarrow{u} \| = AB$.
- Si $\left(\overrightarrow{i} \,;\, \overrightarrow{j} \right)$ est une base orthonormale et si $\overrightarrow{u}(x, y)$ alors : $\| \overrightarrow{u} \| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- On note $\left(\overrightarrow{AB} \,;\, \overrightarrow{AC} \right)$ l'angle orienté délimité par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Définition 1 : On appelle produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et on note $\overrightarrow{u} \,.\, \overrightarrow{v}$ le nombre réel défini par :

$$\boxed{\overrightarrow{u} \,.\, \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\| \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \|^2 - \| \overrightarrow{u} \|^2 - \| \overrightarrow{v} \|^2 \right)}$$

Remarque :
- Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, alors $\overrightarrow{u} \,.\, \overrightarrow{v} = 0$.
- On peut noter l'analogie avec la formule : $ab = \dfrac{1}{2}\left[(a+b)^2 - a^2 - b^2 \right]$.
- En tant que tel cette définition sert peu en 1˚S.

Remarque : Un produit scalaire de deux vecteurs est un *nombre*, pas un vecteur.

Théorème 1 : Si $\left(\overrightarrow{i} \,;\, \overrightarrow{j} \right)$ est une base orthonormale et si on a dans cette base $\overrightarrow{u}(x, y)$ et $\overrightarrow{v}(x', y')$ alors :

$$\boxed{\overrightarrow{u} \,.\, \overrightarrow{v} = x\,x' + y\,y'}$$

$\longrightarrow$ *démonstration*

II. Propriétés

Proposition 1 : (Linéarité)
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :
- $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}\,.\,\overrightarrow{u}$
- $\overrightarrow{u}\,.\,(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{w}$
- $(\lambda\,\overrightarrow{u})\,.\,\overrightarrow{v} = \lambda\,(\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}\,.\,(\lambda\,\overrightarrow{v})$

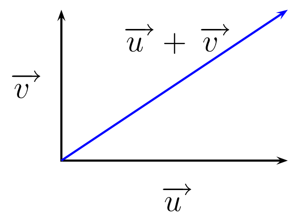
⟶ démonstration laissée en exercice :
la première égalité se déduit immédiatement de la définition. La deuxième et la troisième égalité se montrent à l'aide du théorème 1.

Remarque : On a notamment $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{CD} = -\,\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{CD}$.

Définition 2 : Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = 0$$

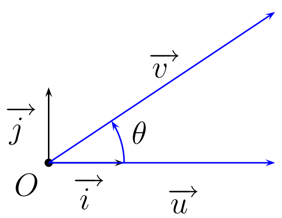
Remarque :
- Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$: $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = 0$ donc $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.
- Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$:
  On a $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 \Leftrightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2$ en notant $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$.
  Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore : $(AB) \perp (BC)$. D'où la notation d'orthogonalité.



III. Autres expressions du produit scalaire

Théorème 2 : Si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$:

$$\boxed{\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})}$$



⟶ démonstration Soit $\left(\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$ la base orthonormale définie par : $\overrightarrow{i} = \dfrac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$, $\overrightarrow{j}$ tel que $\left\|\overrightarrow{j}\right\| = 1$ et $(\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}) = \dfrac{\pi}{2}$.
Dans la base $\left(\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$, $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(\|\overrightarrow{u}\|; 0)$ et $\overrightarrow{v}$ $(\|\overrightarrow{v}\|.\cos(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}); \|\overrightarrow{v}\|.\sin(\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}))$.
D'où $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.\cos(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ d'après le théorème 1 .

Remarque : Si α est la mesure en radian de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ on a : $\alpha = \left|\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)\right|$.

$$\text{Or, } \cos(\alpha) = \begin{cases} \cos\left(\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)\right) & \text{si } \left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right) \geqslant 0 \\ \cos\left(-\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)\right) & \text{si } \left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right) \leqslant 0 \end{cases} = \cos\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)$$

Donc $\cos\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right) = \cos\widehat{BAC}$ et on a donc :

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|.\left\|\overrightarrow{AC}\right\|.\cos\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|.\left\|\overrightarrow{AC}\right\|.\cos\widehat{BAC}.$$

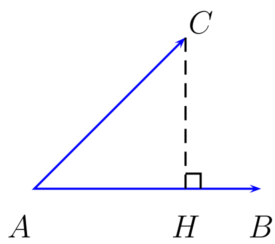
Définition 3 : $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{u}$ est le carré scalaire de $\overrightarrow{u}$. On le note $\overrightarrow{u}^2$.

Théorème 3 : Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, on a : $\|\overrightarrow{u}\|^2 = \overrightarrow{u}^2$.

$\longrightarrow$ *démonstration*

Théorème 4 : Si H est la projection orthogonale de C sur (AB), $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AH}$. Ainsi

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \begin{cases} AB.AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ ont même sens} \\ -AB.AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ ont sens contraire.} \end{cases}}$$



$\longrightarrow$ *démonstration*

IV. Applications du produit scalaire

1) Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale

Proposition 2 : Dans une base orthonormale $\left(\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\right)$, le vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées : $\left(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{i}\,;\ \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{j}\right)$.

$\longrightarrow$ *démonstration*

2) Vecteur normal à une droite

Définition 4 : On dit qu'un vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal à une droite $\mathcal{D}$ si $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$ et si $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à la direction de $\mathcal{D}$.

Théorème 5 : Soit $\mathcal{D}$ une droite passant A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$. On a l'équivalence :

$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{n}.\overrightarrow{AM} = 0.$$

Théorème 6 : Soit $\mathcal{D}$ une droite d'équation $ux + vy + w = 0$ dans un repère orthonormal.
Le vecteur $\overrightarrow{n}(u\,;\,v)$ est normal à $\mathcal{D}$.

$\longrightarrow$ *démonstration*

3) Cercle

Théorème 7 : Dans un repère orthonormal, le cercle de centre $\Omega\,(x_0; y_0)$ et de rayon R a pour équation :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

$\longrightarrow$ *démonstration*

Théorème 8 : Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

$\longrightarrow$ *démonstration*

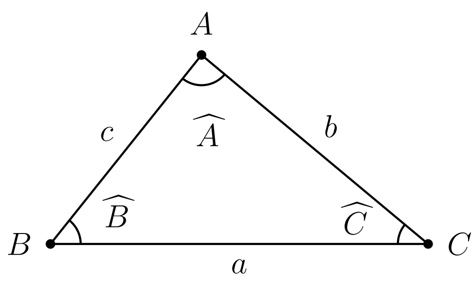
4) Relations dans le triangle

Théorème 9 : (Al-Kashi et Formule des sinus)
Avec les notations de la figure ci-contre, si $\mathcal{S}$ désigne l'aire du triangle ABC :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\widehat{A}$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac.\cos\widehat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\widehat{C}$$

et

$$\frac{a}{\sin(\,\widehat{A}\,)} = \frac{b}{\sin(\,\widehat{B}\,)} = \frac{c}{\sin(\,\widehat{C}\,)} = \frac{abc}{2\mathcal{S}}.$$

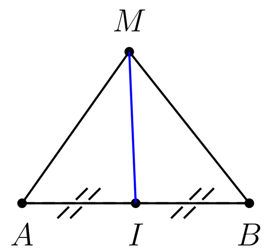


⟶ *démonstration (Il faut faire attention aux angles aigus et obtus.)*

Remarque : On peut réécrire la formule des sinus comme suit :
$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\,bc\,\sin(\,\widehat{A}\,) = \frac{1}{2}\,ac\,\sin(\,\widehat{B}\,) = \frac{1}{2}\,ab\,\sin(\,\widehat{C}\,)$. (comme vu dans la démonstration.)

Théorème 10 : théorème de la médiane

Soient A et B deux points et I le milieu de $[AB]$.
Pour tout point M du plan on a
$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$.



⟶ *démonstration*

5) Lignes de niveau

Définition 5 : La ligne de niveau λ de l'application f est l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = \lambda$.

Quelques indications pour déterminer certaines lignes de niveau :

- $\rightarrow$ $f(M) = \overrightarrow{AM}\,.\,\overrightarrow{u}$ Poser $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et construire H projeté orthogonal de M sur (AB).
- $\rightarrow$ $f(M) = MA^2 + MB^2$ Faire intervenir I milieu de $[AB]$.
- $\rightarrow$ $f(M) = MA^2 - MB^2$ Faire intervenir I milieu de $[AB]$.
- $\rightarrow$ $f(M) = \overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB}$ Faire intervenir I milieu de $[AB]$.

6) Trigonométrie

Rappels : On a pour tout réel a :
$$\left\{\begin{array}{lcl|lcl} \cos(-a) & = & \cos(a) & \sin(-a) & = & -\sin(a) \\ \cos(\pi-a) & = & -\cos(a) & \sin(\pi-a) & = & \sin(a) \\ \cos(\pi+a) & = & -\cos(a) & \sin(\pi+a) & = & -\sin(a) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right) & = & \sin(a) & \sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right) & = & \cos(a) \\ \multicolumn{6}{c}{\cos^2(a)+\sin^2(a)=1} \end{array}\right.$$

Proposition 3 : Pour tous a et b réels on a :

$$\boxed{\begin{array}{r} \cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b. \\ \sin(a+b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b. \end{array}}$$

$\longrightarrow$ *démonstration*

A partir de ces formules, on déduit les suivantes :

Proposition 4 : Pour tous a et b réels on a :

$$\boxed{\begin{array}{rl} \cos(a-b) & = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b \\ \cos(a+b) & = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b \\ \sin(a-b) & = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b \\ \sin(a+b) & = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b \\ \sin(2a) & = 2\sin a.\cos a \\ \cos(2a) & = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a. \end{array}}$$

$\longrightarrow$ *démonstration*

7) Equations trigonométriques (HP)

Pour la résolution des équations du type $\cos(x)=\cos(a)$ et $\sin(x)=\sin(a)$ on a :

$$\boxed{\begin{array}{lll} \cos x = \cos\alpha & \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \\ \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{array}\right. & k\in\mathbb{Z} \\ \sin x = \sin\alpha & \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \alpha + 2k\pi \\ \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{array}\right. & k\in\mathbb{Z} \end{array}}$$