Chap 6 :

Probabilités

I. Vocabulaire

On parle d'expérience aléatoire dès qu'une expérience a plusieurs issues possibles et que celles-ci ne peuvent être ni prévues ni calculées.
Exemple : Le résultat du lancer d'un dé équilibré.

Définition 1 : On appelle univers des possibles, et on note Ω l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$.
Un élément de Ω est appelé événement élémentaire.
Un événement est un sous-ensemble (ou partie) de Ω.
L'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ des parties de Ω est l'ensemble de tous événements liés à l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$.

Remarque : Ω est l'événement certain. Il est toujours réalisé.
$\emptyset$ est l'événement impossible. Il n'est jamais réalisé.

Exemple : Avec notre exemple on a $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Définition 2 :
- L'événement « A ou B », noté $A \cup B$ est obtenu en regroupant les événements élémentaires contenus dans A ou dans B.
- L'événement « A et B », noté $A \cap B$ est obtenu en regroupant les événements élémentaires communs à A et B.
- L'événement contraire de A, noté $\overline{A}$, est composé des événements élémentaires qui ne sont pas contenus dans A.

Définition 3 : Deux événements A et B sont dits incompatibles (ou disjoints) si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

Fréquence d'un événement :

Soit A un événement lié à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$.
Répétons n fois cette expérience. Soit n_A le nombre de réalisations de A lors de ces n répétitions.
La fréquence d'apparitions de A est : $f_n(A) = \dfrac{n_A}{n}$.
L'expérience montre que lorsque n devient de plus en plus grand, $f_n(A)$ tend à se stabiliser autour d'un certain nombre p.
Ce nombre p s'appelle alors probabilité de l'événement A et se note $P(A)$.

Propriétés des fréquences (qui conduisent à la définition 4) :

1. $f_n(\Omega) = 1$ car Ω étant toujours réalisé on a $n_\Omega = n$.
2. $f_n(A) \in [0;1]$ car $0 \leqslant n_A \leqslant n$.
3. Si A et B sont incompatibles, $f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$ car $n_{A\cup B} = n_A + n_B$.

$\longrightarrow$ *démonstration*

II. Calcul des probabilités

Définition 4 : On appelle probabilité toute application P de $\mathscr{P}(\Omega)$ vers $[0;1]$ telle que :
1. $P(\Omega) = 1$.
2. Pour tout événement A de $\mathscr{P}(\Omega)$, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
3. Si A et B sont incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Remarque : Dans la pratique on choisit bien sûr l'application P de manière à représenter au mieux les chances de réalisation de chaque issue.

Exemple : Dans notre exemple on a ainsi $P(\text{« 1 »}) = P(\text{« 2 »}) = P(\text{« 3 »}) = P(\text{« 4 »}) = P(\text{« 5 »}) = P(\text{« 6 »}) = \dfrac{1}{6}$.

Remarque : La représentation des issues d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ ainsi que des probabilités associées est le plus souvent faite à l'aide d'un tableau à double entrée ou d'un arbre. (Voir les exos en TD.)

On a les propriétés calculatoires suivantes :

Proposition 1 : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ et $P(\emptyset) = 0$.

$\longrightarrow$ *démonstration*

Théorème 1 : Pour tous événements A et B, on a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

$\longrightarrow$ *démonstration*

Définition 5 : On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires de Ω ont la même probabilité.
S'il y a équiprobabilité : $P(A) = \dfrac{\text{Nombre de cas favorables à A}}{\text{Nombre de cas possibles}}$.

Exemple : C'est le cas dans notre exemple de lancer de dé.

III. Variables aléatoires

1) Définitions

Il est parfois intéressant d'associer un nombre au résultat d'une expérience aléatoire :

Définition 6 : Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire, on appelle variable aléatoire toute fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$.

Exemple : On lance à présent 2 dés cubiques équilibrés. Si le résultat obtenu en faisant la somme des deux dés est compris entre 6 et 9, nous perdons 1€, sinon, nous gagnons 1€.
Soit X la variable aléatoire associée à l'exemple précédent.
X peut prendre les valeurs 1 et -1.

2) Loi de probabilité - Espérance - Variance

Exemple : Gagner 1€, correspond à l'événement $(X = 1)$. Ceci est réalisé lorsque l'événement $\{(1,1)(1,2)(2,1)\cdots\}$ est réalisé.
Donc la probabilité de « $X = 1$ », notée $P(X = 1)$ est $\dfrac{16}{36}$ et $P(X = -1)$ est $\dfrac{20}{36}$.
On vérifie bien que $P(X = -1) + P(X = 1) = 1$.

Définition 7 : Soit X une variable aléatoire définie sur Ω.
Soit $\{x_1, x_2, \cdots x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X et p_i la probabilité de l'événement « $X = x_i$ ».
On a alors : $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.
On appelle loi de probabilité de X la fonction définie sur $\{x_1, x_2, \cdots x_n\}$ qui à tout x_i associe le nombre $P(X = x_i)$.
On utilise une représentation à l'aide d'un tableau :

Valeurs de X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Définition 8 :

- On appelle Espérance mathématique de X le réel :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i.$$

- On appelle Variance de X le réel positif :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, \big(x_i - E(x)\big)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i^2\right) - \big(E(x)\big)^2.$$

- On appelle Ecart-type de X le réel positif :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Remarque :

- L'espérance représente une moyenne « théorique » de X, c'est la valeur moyenne qu'on peut espérer au bout d'un grand nombre de répétitions de l'expérience $\mathcal{E}$.

- L'écart-type représente la dispersion « théorique » des valeurs possibles autour de $E(X)$.
On préfère utiliser $\sigma(X)$ plutôt que $V(X)$ car il est *homogène* avec X.

Exemple : Dans notre exemple précédent on a la loi de probabilité :

Valeurs de X	-1	1
$P(X = x_i)$		

et on a $E(X) = \ldots\ldots\ldots$

$V(X) = \ldots\ldots\ldots$

puis $\sigma(X) = \ldots$