

Géométrie vectorielle

I. Rappels

1) Définition

Définition 1 : le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est caractérisé par

- sa direction : la droite (AB) ,
- son sens : $A \rightarrow B$,
- sa **norme** ou longueur : $\|\vec{u}\| = AB$.

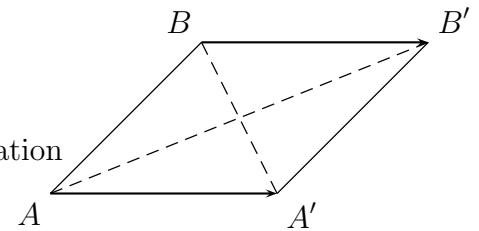
Définition 2 : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ s'ils ont même direction ((AB) et (CD) sont parallèles), même sens et même norme ($AB = CD$).

On dit que ce sont deux **représentants** du même vecteur.

Remarque : On a $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$, c'est le **vecteur nul**.

Théorème 1 : caractérisation du parallélogramme

$ABDC$ est un parallélogramme :
 si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$,
 ou si et seulement si $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu,
 ou si et seulement si D est l'image de C par la translation
 de vecteur \overrightarrow{AB} .

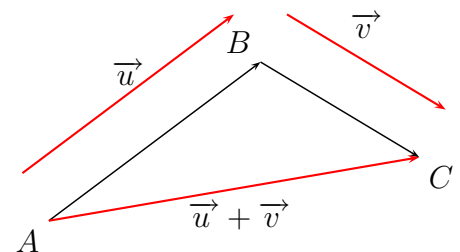


2) Addition de vecteurs

Définition 3 : Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ un vecteur. On définit $-\vec{u}$ comme le vecteur ayant même direction que \vec{u} , sens contraire à \vec{u} et même norme que \vec{u} . C'est \overrightarrow{BA} .

On peut représenter la somme de deux vecteurs à l'aide de deux représentants mis « bout à bout » :

Définition 4 : Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs et A un point quelconque; B et C deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ alors on peut alors définir $\vec{u} + \vec{v}$ par $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.



Remarque : La somme de vecteurs représente la « composition » (succession) des translations.

Remarque : L'égalité $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ s'appelle la **relation de Chasles**.

Propriété 1 : On a :

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$,
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$.

Définition 5 : On définit $\vec{u} - \vec{v}$ par $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

Cette définition bien qu'apparemment « compliquée », correspond à l'idée intuitive de la différence de deux vecteurs.

Exemple : On a ainsi par exemple $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$ (ce qui paraît quand même assez logique)..

De même $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}$.

II. Multiplication par un réel

On peut multiplier les vecteurs par des réels (et UNIQUEMENT par des réels).

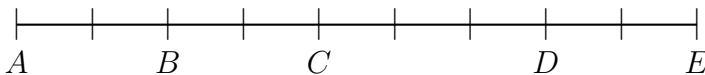
1) Définition

Définition 6 : Le produit du vecteur \vec{u} par le réel k est le vecteur noté $k\vec{u}$ défini par

- si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$: $k\vec{u} = \vec{0}$,
- si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $k > 0$: $k\vec{u}$ a même direction et même sens que \vec{u} et sa norme vaut $\|k\vec{u}\| = k\|\vec{u}\|$,
- si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $k < 0$: $k\vec{u}$ a même direction et sens opposé à \vec{u} et sa norme vaut $\|k\vec{u}\| = -k\|\vec{u}\|$.

Remarque : Dans le deux derniers cas on a $\|k\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|$.

Exemple : A l'aide de la droite graduée ci-dessous on constate par exemple que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$ ou encore $\overrightarrow{EC} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$.



Propriété 2 : on a

- $k\vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$,
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$,
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$,
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$,
- $1.\vec{u} = \vec{u}$,
- $(-1).\vec{u} = -\vec{u}$.

Exemple : On a par exemple $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$, $\frac{1}{3}(6\overrightarrow{AB}) = 2\overrightarrow{AB}$, et si $2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ alors $A = B$.

2) Colinéarité

Définition 7 : On dit que deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si l'un est le produit de l'autre par un réel.

C'est-à-dire s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

k est appelé le **coefficient de colinéarité**.

Remarque : C'est la même chose que de dire que \vec{u} et \vec{v} ont même direction.

Convention : $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur.

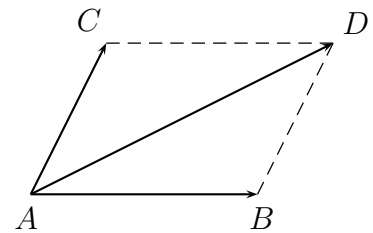
Théorème 2 : • \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires si et seulement si (AB) et (CD) sont parallèles (voire confondues).

• \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires si et seulement si A, B et C sont alignés.

III. Applications géométriques

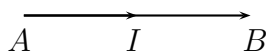
1) Parallélogramme

Théorème 3 : $ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.



2) Milieux

Propriété 3 : I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$ ou bien si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$.



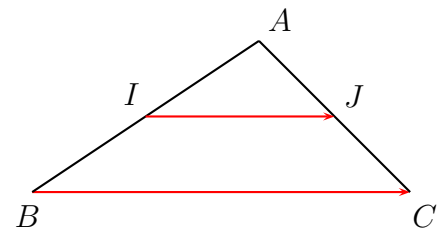
Théorème 4 : Droite des milieux

Soit ABC un triangle,

si I le milieu de $[AB]$ et J celui de $[AC]$ alors

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}.$$

Et inversement si $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ alors I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[AC]$.



3) Centre de gravité

Propriété 4 : Soit ABC un triangle, A' le milieu de $[BC]$, B' celui de $[AC]$ et C' celui de $[AB]$.

G est le centre de gravité du triangle ABC :

- si et seulement si $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AA'}$,
- ou si et seulement si $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BB'}$,
- ou si et seulement si $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CC'}$.

