

Chap 4 :

Dérivation

I. Nombre dérivé

Dans toute cette partie on prend une fonction f définie (au moins) sur un intervalle I . On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

1) Définition

On rappelle la définition du **taux de variation** d'une fonction f entre deux points a et b de son ensemble de définition.

Définition 1 : Soit f définie sur un intervalle I , a et b deux nombres de I . On appelle **taux de variation** de f entre les points a et b le rapport $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

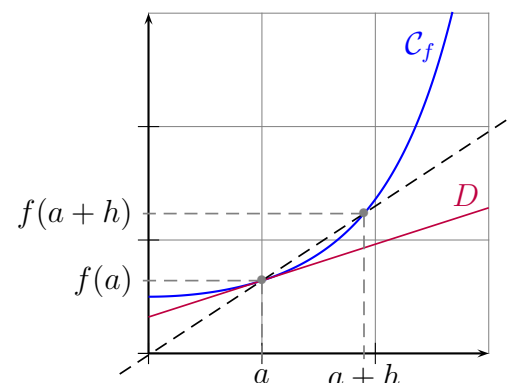
On peut à l'aide du taux de variation définir le **nombre dérivé de f en a** où a est un point de I .

Définition 2 : On dit que f est **dérivable** en a si le taux de variation de f entre a et $a + h$ (où h est un nombre réel « petit ») a une limite finie lorsque h tend vers 0 c'est-à-dire $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est finie. Cette limite est appelée **nombre dérivé** de f en a . Elle est notée $f'(a)$.

Exemple : on prend $f(x) = x^2$ et $a = 1$: $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \frac{h^2 + 2h}{h} = h + 2$ et donc $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2) = 2$.

2) Tangente à une courbe

Définition 3 : On appelle **tangente à la courbe \mathcal{C}_f en a** la droite qui « touche » \mathcal{C}_f au point d'abscisse a en « collant » à la courbe. Cette droite D est la droite qui passe par le point de coordonnées $(a; f(a))$ et dont le coefficient directeur est $f'(a)$. Une équation de cette tangente est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
→ démonstration



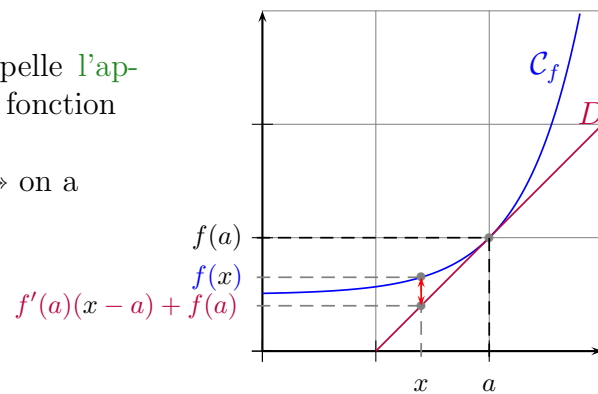
Remarque : Cette définition est assez logique au vu de l'activité préparatoire.

Remarque : De la définition on tire la propriété : si f est dérivable en a alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
 → démonstration

3) Approximation affine

On peut se faire une idée « approximative » d'une fonction au voisinage d'un point à l'aide du nombre dérivé. On parle d'**approximation affine** de f en a .

Définition 4 : Si f est dérivable en a on appelle l'**approximation affine** de f en a la fonction $x \rightarrow f'(a)(x - a) + f(a)$.
 Pour tous les x « proche de a » on a $f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a)$.



II. Fonction dérivée

1) Définition

Définition 5 : Soit f une fonction définie sur I .
 On dit que f est **dérivable sur I** si f est dérivable en tout point de I .
 On appelle **fonction dérivée** de f la fonction f' : $\begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{cases}$.

2) Fonctions de référence

Il existe toute une liste de fonctions dérivées à connaître *par coeur* :

Proposition 1 : Soit $f(x) = \alpha x + b$ définie sur \mathbb{R} (α et β réels fixés).
 f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = \alpha$.
 —→ démonstration

Remarque : On a notamment que les fonctions constantes ont une fonction dérivée nulle.

Proposition 2 : Soit $f(x) = x^2$ définie sur \mathbb{R} .
 f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = 2x$.
 —→ démonstration

De manière plus générale on a :

Proposition 3 : Soit n un entier et $f(x) = x^n$ définie sur \mathbb{R} .
 f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = nx^{n-1}$.
 —→ démonstration à faire plus tard avec la récurrence.

Proposition 4 : Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ définie sur $] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$.
 f est dérivable sur $] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$ et $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
 —→ démonstration

De manière plus générale on a :

Proposition 5 : Soit n un entier et $f(x) = \frac{1}{x^n}$ définie sur $] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$.
 f est dérivable sur $] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$ et $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$.
 —→ démonstration (admis)

Proposition 6 : Soit $f(x) = \sqrt{x}$ définie sur \mathbb{R}^+ .
 f est dérivable sur $] 0; +\infty[$ (et pas en 0) et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
 —→ démonstration

Proposition 7 : Soit $f(x) = \sin(x)$ définie sur \mathbb{R} .
 f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = \cos(x)$.

→ démonstration : on admet que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$ on en tire $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0$
 et on utilise $\sin(x+h) = \sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x)$.
 A voir après le cours sur le produit scalaire.

Proposition 8 : Soit $f(x) = \cos(x)$ définie sur \mathbb{R} .
 f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = -\sin(x)$. (Attention au signe -)
 → démonstration

3) Opérations sur les fonctions

On a des propriétés très pratiques pour pouvoir dériver n'importe quelle fonction à l'aide des dérivées des fonctions de référence.

Proposition 9 : Soit k un nombre réel et f une fonction définie et dérivable sur I . alors kf est dérivable sur I et $(kf)'(x) = kf'(x)$.
 On note souvent $(kf)' = kf'$.
 → démonstration

Proposition 10 : Soit f et g deux fonctions définies et dérivables sur I . alors $f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
 On note souvent $(f + g)' = f' + g'$.
 → démonstration

Proposition 11 : Soit f et g deux fonctions définies et dérivables sur I . alors fg est dérivable sur I et $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
 On note souvent $(fg)' = f'g + fg'$.
 → démonstration

Remarque : On a notamment $(f^2)' = 2f'f$.

Proposition 12 : Soit f une fonction définie, dérivable sur I et qui ne s'annule pas sur I alors $\frac{1}{f}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$.

On note souvent $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$.

→ démonstration

Proposition 13 : Soit f et g deux fonctions définies et dérivables sur I . Si g ne s'annule pas sur I alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

On note souvent $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

→ démonstration

et enfin :

Proposition 14 : Soit f une fonction définie et dérivable sur I , α ($\alpha \neq 0$) et β deux réels. Soit J l'intervalle formé des x tels que $\alpha x + \beta$ soit dans I . La fonction $g : x \rightarrow f(\alpha x + \beta)$ est dérivable sur J et $g'(x) = \alpha f'(\alpha x + \beta)$.

→ démonstration (admis)

III. Sens de variations

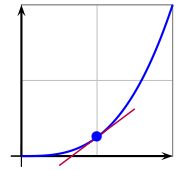
On dispose d'un théorème fondamental pour l'étude des fonctions, il fait un lien entre le signe de la fonction dérivée f' et le sens de variations de la fonction f .

Théorème 1 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si $f' = 0$ sur I , alors f est constante sur I .
- Si $f' > 0$ sur I , sauf en un nombre fini de réels, alors f est strictement croissante sur I .
- Si $f' < 0$ sur I , sauf en un nombre fini de réels, alors f est strictement décroissante sur I .

→ démonstration (admis)

Remarque : Ce résultat ne choque pas l'intuition car si en un point de la courbe $(x_0; f(x_0))$ le nombre dérivé $f'(x_0)$ est positif alors autour de ce point la fonction est croissante car c'est le coefficient directeur de la tangente. Et donc si la dérivée est positive sur I , f est bien croissante sur I .



Dans la pratique, pour déterminer les variations d'une fonction f , on calcule sa dérivée f' on en cherche le signe (en factorisant le plus possible f') et on découpe son ensemble de définition en intervalles sur lesquels f' est de signe constant. On peut alors mettre les résultats dans le tableau de variations de f .

Exemple : Prenons la fonction $f(x) = x^2$ définie sur \mathbb{R} on a $f'(x) = 2x$ et donc le tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

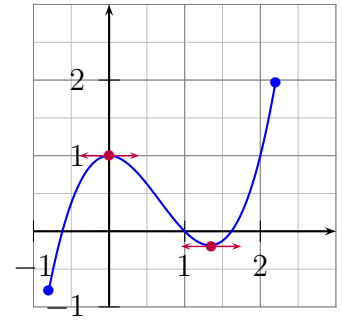
IV. Extrema locaux

1) définition

Définition 6 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit c un réel intérieur à I . (c distinct des bornes de I).

- On dit que f présente un **maximum local** en c si $f(c)$ est le maximum de la restriction de f à un intervalle ouvert contenant c .
- On dit que f présente un **minimum local** en c si $f(c)$ est le minimum de la restriction de f à un intervalle ouvert contenant c .
- Un **extremum local** est un maximum local ou un minimum local.

Remarque : L'exemple ci-contre présente un minimum et un maximum globaux (qui sont aux bornes de l'intervalle de définition) ainsi qu'un minimum et un maximum locaux. Il faut bien distinguer les deux types d'extrema.



2) une condition nécessaire

Théorème 2 : Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I . Si f admet un extremum local en c , alors $f'(c) = 0$.
 → démonstration

Remarque : Cette propriété sert à trouver des minima ou des maxima (locaux) pour certains problèmes qu'on veut étudier.

Remarque : Cette propriété n'est pas vraie dans les deux sens, ce n'est qu'une *implication*.
 (Son symbole mathématique est \implies .)
 En effet, par exemple, la fonction cube $f(x) = x^3$ est telle que $f'(0) = 0$ mais malgré cela f n'admet pas d'extremum local en 0.

