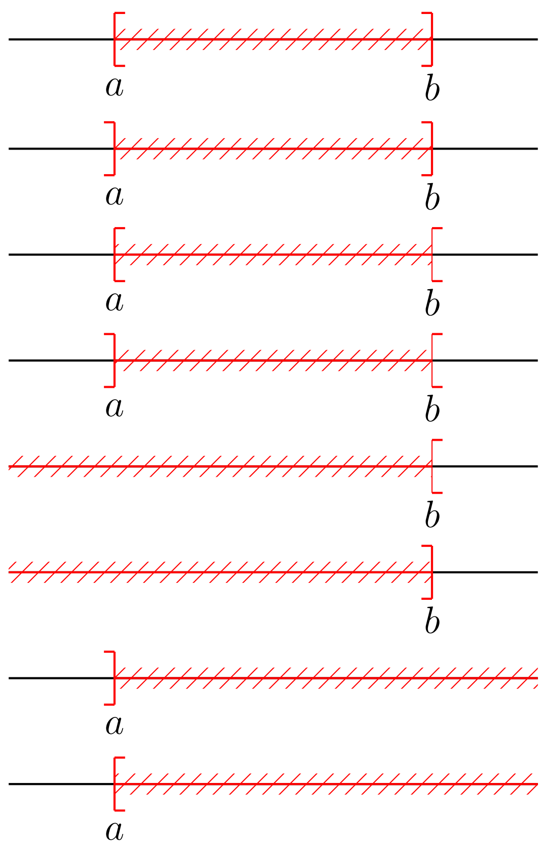
Chap IV : Généralités sur les fonctions

I. Définition de fonction

1) Notions d'intervalles

Définition 1 : Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.
L'ensemble des nombres réels compris entre a et b (au sens large) est appelé intervalle fermé de bornes a et b et est noté $[a\,;\,b]$.

On peut faire la liste de tous les intervalles possibles ainsi que les inégalités qui leur correspondent :



$[a;b]$	$a \leqslant x \leqslant b$
$]a;b]$	$a < x \leqslant b$
$[a;b[$	$a < x < b$
$]a;b[$	$a < x$
$]-\infty;b[$	$x < b$
$]-\infty;b]$	$x \leqslant b$
$]a;+\infty[$	$a < x$
$[a;+\infty[$	$a \leqslant x$

Remarque : On a $\mathbb{R} =]-\infty\,;\,+\infty[$ et on note $\{a\} = [a;a]$.
$\longrightarrow$ Parler de réunion et d'intersection d'intervalles en TD.

2) Définition

Définition 2 : Soit D_f un intervalle ou une union d'intervalle.
On définit une fonction f de D_f dans $\mathbb{R}$ en associant à chaque x de D_f un *unique* réel noté $f(x)$.
D_f est appelé l'ensemble de définition de f.

$f(x)$ est appelée l'image de x par f.

On la note $f : \left\{ \begin{array}{ccc} D_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$.

Exemple : Dans notre activité on avait $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0;4] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -x^2+4x \end{array} \right.$.

3) Ensemble de définition

Il faut que pour tout x de D_f $f(x)$ « existe ». Par exemple $\sqrt{x}$ ne peut pas être défini pour x négatif.
Il arrive que l'ensemble de définition ne soit pas précisé, on convient alors que D_f est le plus grand possible.

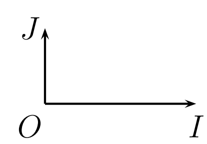
Exemple : Si on a « juste » $f(x) = \dfrac{1}{x}$, cela sous-entend que $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

Exercice 1 : Trouver les ensembles de définition maximaux de :

- $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$ $\longrightarrow D_g =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$
- $h(x) = \sqrt{x+1}$ $\longrightarrow D_h =]-1; +\infty[$

II. Représentation graphique

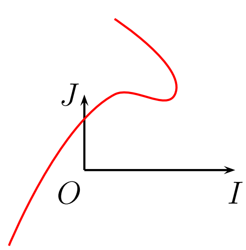
1) Définition



Dans toute la suite on utilisera un repère orthogonal $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ où $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.

Définition 3 : Soit f une fonction définie sur D_f. On appelle courbe représentative de f dans le repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x; f(x))$ pour tout x de D_f.

Exemple : Dans notre activité on avait la courbe représentative de f.

Remarque : **Attention** 

n'est pas la courbe représentative d'une fonction.

2) Equation d'une courbe

Définition 4 : On dit que la courbe représentative de f, souvent notée C_f, dans le repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ a pour équation $y = f(x)$.
$\longrightarrow$ A expliquer sur l'exemple de l'activité.

Remarque : Quand on a la courbe représentative d'une fonction f, l'ensemble de définition de f est l'ensemble des abscisses des points de la courbe.

III. Image et antécédents

1) Définition

Comme on l'a vu dans la partie II. l'image (unique !) d'un x de D_f est $f(x)$.

On considère un réel b quelconque.

Définition 5 : Les antécédents de b par f sont *tous* les nombres x de D_f tels que $f(x) = b$.
Il peut y en avoir plusieurs ou aucun.

Exemple : Dans notre activité les antécédents de :

- 3 sont $\longrightarrow$ 1 et 3
- 4 sont $\longrightarrow$ 2
- 8 sont $\longrightarrow$ il n'y en a pas

2) Lecture graphique

On peut déterminer sur la courbe représentative d'une fonction image et antécédents.
On parle de détermination graphique. A voir sur la courbe de l'activité.

Exemple : Prenons $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [-3;3] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ et cherchons graphiquement les images de 3 et 1, les antécédents de 4.

IV. Variations des fonctions

1) Croissance

Définition 6 : Soit f une fonction et I un intervalle inclu dans son ensemble de définition.
On dit que f est strictement croisante sur I si on a :
pour tout $u < v$ de I : $f(u) < f(v)$.

Remarque : f est « seulement » croissante si elle fait un plat.

Exemple : Dans notre activité la fonction f est croissante sur $[0; 2]$.

2) Décroissance

Définition 7 : Soit f une fonction et I un intervalle inclu dans son ensemble de définition.
On dit que f est strictement décroisante sur I si on a :
pour tout $u < v$ de I : $f(u) > f(v)$.

Remarque : f est « seulement » décroissante si elle fait un plat.

Exemple : Dans notre activité la fonction f est décroissante sur $[2; 4]$.

Remarque : **Attention** le contraire de croissante n'est pas décroissante.

3) Extremum

Définition 8 : Soit f une fonction et I un intervalle inclu dans son ensemble de définition. Soit a et b appartenant à I.

- $f(a)$ est le minimum de f sur I si $f(a)$ est la plus petite valeur des $f(x)$ pour x dans I.
  C'est-à-dire : pour tout x de I $f(x) \geqslant f(a)$.
- $f(b)$ est le maximum de f sur I si $f(b)$ est la plus grande valeur des $f(x)$ pour x dans I.
  C'est-à-dire : pour tout x de I $f(x) \leqslant f(b)$.

Dans les deux cas on parle d'extremum (au pluriel extrema) de la fonction f sur I.

Remarque : il faut distinguer extremum $(f(a))$ de valeur ou est prise l'extremum (a).

4) Tableau de variations

Il existe un moyen très pratique de résumer toutes les informations que l'on a sur une fonction f : le tableau de variations.
On y trouve l'ensemble de définition, les intervalles de croissance et de décroissance et les extrema.

Voici celui de la fonction f de l'activité.

x	0		2		4
f			4		
	0	↗		↘	0