Chap 10 : Fonctions affines et droites

Dans tout le chapitre on munit le plan d'un repère quelconque $\left(O\,;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.

I. Fonctions affines

1) Définitions

Définition 1 : On appelle fonction affine toute fonction du type $f\ :\ \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & ax+b\end{array}\right.$
où a et b sont deux nombres réels fixés.
Sa courbe représentative C_f est une droite oblique.
a s'appelle le coefficient directeur de C_f,
b s'appelle l'ordonnée à l'origine de C_f.

Exemple : $f(x) = 2x - 3, \quad f(x) = -x\ \ldots$

Remarque : Si $a = 0$, on parle de fonction constante : $\quad f(x) = b$.
Si $b = 0$, on parle de fonction linéaire : $\quad f(x) = ax$.
Une fonction linéaire est aussi une fonction affine.

2) Coefficient directeur

Définition 2 : Soit g une fonction quelconque définie sur un intervalle I,
u et v deux nombres de I.
On appelle taux de variation de g entre u et v le nombre $\dfrac{g(v)-g(u)}{v-u}$.

Exemple : Prenons la fonction $g(x) = x^2 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
Déterminer le taux de variation de g entre 0 et 2, entre 1 et 3 puis entre -1 et 0.

On a $\dfrac{g(2)-g(0)}{2-0} = \dfrac{5-1}{2} = 2\ , \quad \dfrac{g(3)-g(1)}{3-1} = \dfrac{10-2}{2} = 4$
et $\quad \dfrac{g(0)-g(-1)}{0-(-1)} = \dfrac{1-2}{1} = -1.$

Remarque : A priori un taux de variation d'une fonction dépend des valeurs de u et v.

La notion de taux de variation permet de caractériser les fonctions affines :

Théorème 1 :
- Si f est une fonction affine alors le taux de variation entre deux nombres quelconques est toujours le même et c'est exactement le coefficient directeur de C_f.

  C'est à dire que si $f(x) = ax + b$ alors on a $\dfrac{f(v) - f(u)}{v - u} = a$ pour tous les u et v $(u \neq v)$.

- *Réciproquement* , si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tous les u et v le taux de variation de f entre u et v est toujours le même (on l'appelle a) alors f est une fonction affine et son coefficient directeur est a.

On a également une propriété sur les variations des fonctions affines :

Proposition 1 : Si f est une fonction affine de coefficient directeur a alors :
- f est croissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si a est positif.
- f est décroissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si a est négatif.

3) fonctions affines et droites représentatives

Il faut savoir tracer la courbe C_f à partir de l'expression de la fonction : $f(x) = ax + b$.

- soit en utilisant l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur,
- soit en cherchant les coordonnées de deux points de la droite C_f

il faut de même savoir retrouver l'expression de f $\Big(f(x) = ax + b\Big)$ à partir du tracé de C_f.

- soit en relevant l'ordonnée à l'origine b et en calculant un taux de variation qui donnera le coefficient directeur a,
- soit en relevant les coordonnées de deux points de la droite C_f et en en tirant un système 2×2 aux inconnues a et b qu'il faut alors résoudre.

$\longrightarrow$ à voir en TD.

II. Droites

1) Equations de droites

Définition 3 :
- Si la droite (D) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, elle admet une équation du type $y = ax + b$ où a et b sont des constantes.
  (D) est la courbe représentative de la fonction affine $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax+b \end{array} \right.$.
- Si la droite (D) est parallèle à l'axe des ordonnées, elle admet une équation du type $x = c$ où c est une constante.

Remarque : (HP) On peut également avoir une équation cartésienne de la droite (D) avec une équation du type : $ax + by + c = 0$.
L'intérêt est qu'on n'a pas à distinguer si la droite (D) est parallèle à l'axe des ordonnées ou non.
On peut retrouver avec cette équation les deux types d'équations précédentes.

2) Parallélisme

Proposition 2 :
- Deux droites d'équations $x = c$ et $y = ax + b$ ne sont jamais parallèles.
- Deux droites d'équations $x = c$ et $x = c'$ sont toujours parallèles (et parallèles à l'axe des ordonnées).
- Deux droites d'équation $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$ sont parallèles si et seulement si $a = a'$.