Chap 6 :

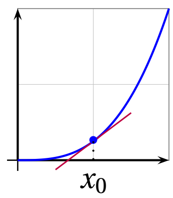
Variations des fonctions

I. Signe de f'

1) Sens des variations des fonctions

Théorème 1 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- Si $f' = 0$ sur I, alors f est constante sur I.
- Si $f' > 0$ sur I alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f' < 0$ sur I alors f est strictement décroissante sur I.

Remarque : Ce résultat ne choque pas l'intuition car si en un point de la courbe $\left(x_0; f(x_0)\right)$ le nombre dérivé $f'(x_0)$ est positif alors, autour de ce point, la fonction est croissante car c'est le coefficient directeur de la tangente. Et donc si la dérivée est positive sur I, f est bien croissante sur I.



A quoi ça sert ? : Ca sert à déterminer le tableau de variations d'une fonction :
on calcule sa dérivée f' on en cherche le signe (en factorisant le plus possible f') puis on découpe son ensemble de définition en intervalles sur lesquels f' est de signe constant.
On peut enfin mettre les résultats dans le tableau de variations de f.

Exemple : Prenons la fonction $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ on a donc la fonction dérivée $f'(x) = 2x$. On connaît déjà le signe de $2x$, on peut donc dresser le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Exemple : Déterminer le tableau de variations de la fonction $f x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

2) Equation $f(x) = k$

Proposition 1 : Soit f une fonction dérivable sur $[a; b]$ avec $f' > 0$ sur $[a; b]$ (donc f croissante).
Pour tout nombre k de $\left[f(a); f(b)\right]$ l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule sur $[a; b]$.

Remarque : On a la même propriété pour une fonction f décroissante avec $f' < 0$.

A quoi ça sert ? : A savoir s'il y a des solutions à certaines équations qu'on ne sait pas résoudre.
On peut alors très souvent trouver des valeurs approchées de ces solutions.

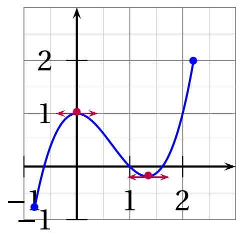
Exemple : On souhaite déterminer le nombre de solutions de l'équation $\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1 = 2$.
On ne sait pas résoudre une telle équation donc on regarde le tableau de variations de la fonction $f\,x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$ (trouvé dans le paragraphe 1.) et on constate qu'il n'y a qu'une seule solution qui est dans $[2\,;+\infty[$. On peut alors raffiner le procédé pour constater que cette solution est dans $[3\,;4]$ puis dans $[3,2\,;3,3]$ ...
La calculatrice permet de faire tous les calculs grâce à la fonction *range*.

II. Extrema locaux

1) Définition

Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit c un réel à l'intérieur de I.
(c distinct des bornes de I).
- f a un *maximum local* en c si $f(c)$ est le maximum de f « autour » de c.
- f a un *minimum local* en c si $f(c)$ est le minimum de f « autour » de c.
- Un *extremum local* est un maximum local ou un minimum local.

Pourquoi local ? On a déjà vu en 2° la notion de maximum et de minimum d'une fonction. Un maximum ou un minimum local est à l'intérieur de I et n'est pas forcément le maximum ou le minimum de la fonction.
Sur l'exemple de droite la fonction a un maximum et un minimum ainsi qu'un maximum et un minimum locaux.



2) une condition nécessaire

Proposition 2 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.
Si f admet un extremum local en c, alors $f'(c) = 0$.

A quoi ça sert ? : Cette propriété sert à trouver des minima ou des maxima (locaux) pour certains problèmes qu'on veut étudier sans avoir à faire toute l'étude de la fonction.