Chap 4 :

Dérivation

I. Nombre dérivé

Dans toute cette partie on prend une fonction f définie (au moins) sur un intervalle I.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1) Définition

On rappelle la définition du taux de variation d'une fonction f entre deux points a et b.

Définition 1 : On appelle *taux de variation de f* entre les points a et b le rapport $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

On peut à l'aide du taux de variation définir le nombre dérivé de f en a pour a un point de I.

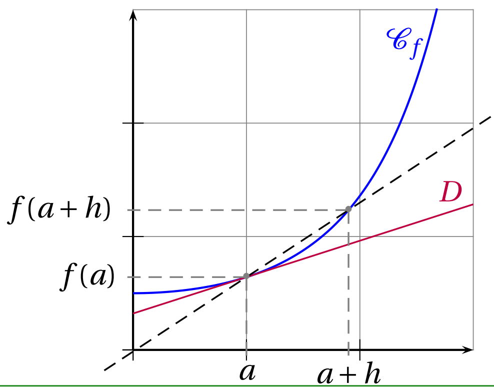
Définition 2 : On dit que f est *dérivable* en a si le taux de variation de f entre a et $a+h$ (où h est un «petit» nombre) a une limite qui est un nombre lorsque h tend vers 0
c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et n'est pas ∞.
Cette limite est appelée *nombre dérivé* de f en a. Elle est notée $f'(a)$.

Exemple : on prend $f(x)=x^2$ et $a=1$: $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{(1+h)^2-1}{h}=\dfrac{h^2+2h}{h}=h+2$ et donc
$f'(1)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}(h+2)=2$.

2) Tangente à une courbe

Le nombre dérivé est lié à la notion de tangente à la courbe.

Définition 3 : On appelle *tangente à la courbe* $\mathscr{C}_f$ en a la droite qui «touche» $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a en «collant» à la courbe.
Cette droite D est la droite qui passe par le point de coordonnées $\big(a\,;\,f(a)\big)$ et dont le coefficient directeur est $f'(a)$.
Une équation de cette tangente est
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

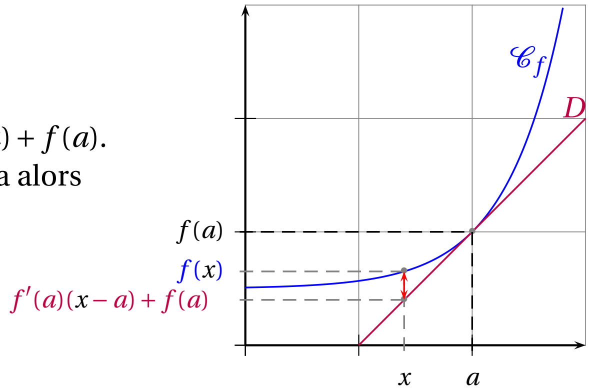


Remarque : Cette définition est assez logique au vu de l'activité préparatoire.

3) Approximation affine

On peut se faire une idée « approximative » d'une fonction au voisinage d'un point à l'aide du nombre dérivé. On parle d'approximation affine de f en a.

Définition 4 : Si f est dérivable en a on appelle *approximation affine* de f en a la fonction affine $x \longrightarrow f'(a)(x-a)+f(a)$.
Pour tous les x « proche de a » on a alors
$f(x) \approx f'(a)(x-a)+f(a)$.



II. Fonction dérivée

1) Définition

Définition 5 : Soit f une fonction définie sur I.
On dit que f est *dérivable sur I* si f est dérivable en tout point de I.
On appelle *fonction dérivée* de f la fonction $f' : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array} \right.$.

Exemple : Par exemple pour la fonction $f(x) = x^2$ on connaît sa fonction dérivée, c'est $f'(x) = 2x$ et on a donc $f'(0) = 0$, $f'(3) = 6$ ou $f'(1) = 2$ qu'on avait déjà calculé.

2) Fonctions de référence

Il existe toute une liste de fonctions dérivées à connaitre ***par coeur***, ce sont celles des fonctions que l'on rencontre le plus souvent. De plus on sait déterminer la fonction dérivée de n'importe quelle fonction grâce à elles.
On en dresse un tableau récapitulatif.

$f(x) =$	$f'(x) =$
$ax+b$	a
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

3) Opérations sur les fonctions

On a des propriétés très pratiques pour pouvoir dériver n'importe quelle fonction à l'aide des dérivées des fonctions de référence.
Là encore on en dresse un tableau récapitulatif.

fonction	fonction dérivée
$f+g$	$f'+g'$
$5f$	$5f'$
$f\times g$	$f'\times g + f\times g'$
f^2	$2f'\times f$
$\frac{1}{f}$	$-\frac{f'}{f^2}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'\times g - f\times g'}{g^2}$
$f(ax+b)$	$a\times f'(ax+b)$