Chap 1 : Généralités sur les fonctions

I. Vocabulaire

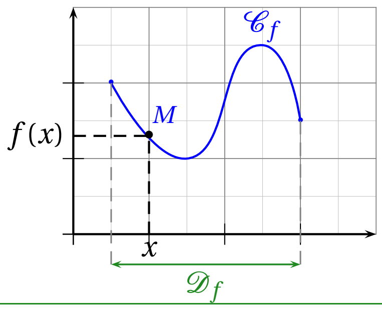
1) Restriction d'une fonction

Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$ et soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ inclu dans $\mathcal{D}_f$.
La *restriction de f à I* est la fonction g définie sur I par $f(x) = g(x)$.

Remarque : ***Attention*** les fonctions f et g sont différentes mais dans la pratique on ne fera pas forcément la distinction. On parlera ainsi de la fonction carré sur $[-2;2]$ par exemple.

2) Courbe d'une fonction

Définition 2 : Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$.
On appelle courbe représentative de f, l'ensemble des points M de coordonnées $\left(x\ ;\ f(x)\right)$, pour tous les x dans $\mathcal{D}$.
On la note souvent $\mathcal{C}_f$.



3) Monotonie

Définition 3 : Une fonction définie sur I est *monotone* sur I si elle est croissante sur I ou si elle est décroissante sur I.

II. Notations

1) Comparaison de deux fonctions

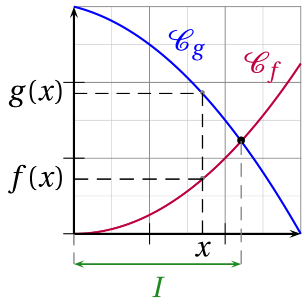
Définition 4 : Soient f et g deux fonctions et I un intervalle.
• On dit que $f = g$ sur I si $f(x) = g(x)$ pour tous les x de I.
• On dit que $f \leqslant g$ sur I si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tous les x de I

Remarque : On définit de manière analogue : $f < g$ sur I , $f > g$ sur I et $f \geqslant g$ sur I.

Représentation graphique :
Soit $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes respectives de deux fonctions f et g.

$$f \leqslant g \text{ sur } I \iff \mathscr{C}_f \text{ est en dessous de } \mathscr{C}_g \text{ sur } I.$$

Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersections des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



Définition 5 : On dit que $f \geqslant 0$ sur I si $f(x) \geqslant 0$ pour tout x de I.

Interprétation graphique :
La courbe représentative de f est située au dessus de l'axe des abscisses pour les x dans I.

Remarque : On définit de manière analogue $f < 0$ sur I , $f > 0$ sur I et $f \geqslant 0$ sur I.

2) Opérations sur les fonctions

Définition 6 : Soient f et g deux fonctions et α un réel.

- La fonction $f + g$ est la fonction définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout x.
- La fonction αf est la fonction définie par $(\alpha f)(x) = \alpha \times f(x)$ pour tout x.
- La fonction $f \times g$ est la fonction définie par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ pour tout x.
- La fonction $\dfrac{1}{f}$ est la fonction définie par $\left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ pour tout x.

Exemple : Prenons f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 2x - 3$ et g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 1$.
Déterminer $2f + 3g$ et fg .

3) Le cas $f \circ g$

Définition 7 : Soient f et g deux fonctions.
La fonction $f \circ g$ est la fonction définie par $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$.

Remarque : Il faut faire attention aux ensembles de définition.
Par exemple $\sqrt{\ } \circ (x+1)$ (c'est-à-dire $\sqrt{x+1}$) n'est pas définie pour les $x < -1$.

Remarque : ***Attention*** on a (presque) toujours $f \circ g \neq g \circ f$.
Avec $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2 + 1$ par exemple :
$(g \circ f)(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2 + 1 = x + 1$ alors que $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Proposition 1 : Soient g et f deux fonctions monotones.
Alors la fonction $f \circ g$ est monotone :
- Si f et g sont de même monotonie, alors $f \circ g$ est croissante.
- Si f et g sont de monotonie différentes, alors $f \circ g$ est décroissante.

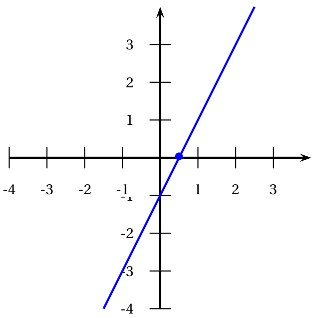
Remarque : Ceci ne marche que pour la composition $f \circ g$ et non pour le *produit* $f \times g$.

III. Fonctions usuelles

1) Les fonctions affines

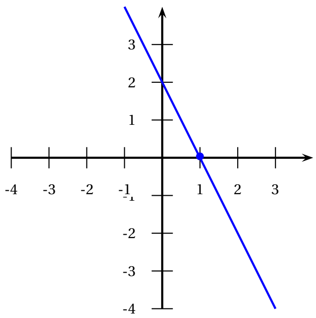
Définition 8 : On appelle *fonction affine* toute fonction de la forme $f : x \longmapsto ax + b$,
avec a et b deux constantes.
Sa courbe représentative est la droite d'équation $y = ax + b$.
a est le *coefficient directeur* de f,
b est l' *ordonnée à l'origine* de f.

Pour $a > 0$:



x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		-	0	+	

Pour $a < 0$:



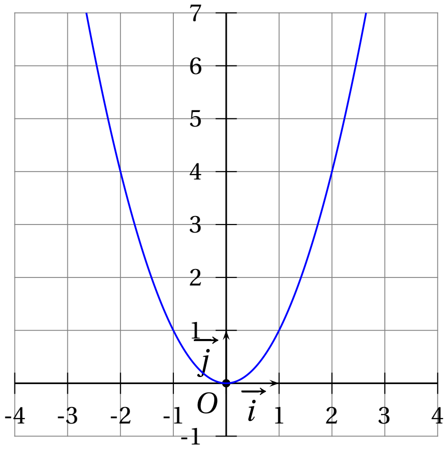
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-2x+2$		+	0	-	

2) La fonction $f : x \longmapsto x^2$

La fonction *carré* est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Voici son tableau de variation et sa courbe représentative :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$



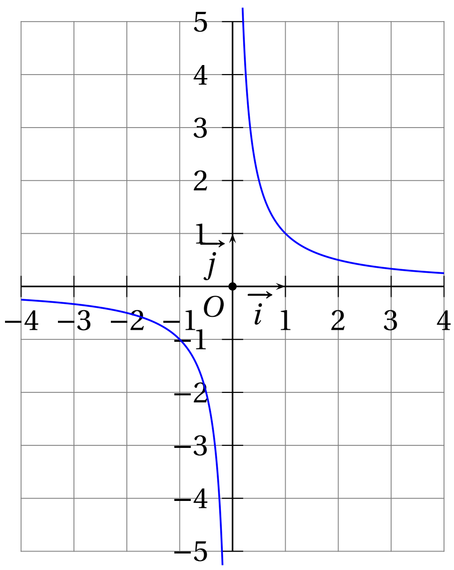
Remarque : La courbe représentative de f est une parabole de sommet O.
La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on dit que f est paire .

3) La fonction $h : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$

La fonction *inverse* est définie pour tout réel non nul,
c'est-à-dire que son ensemble de définition est $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

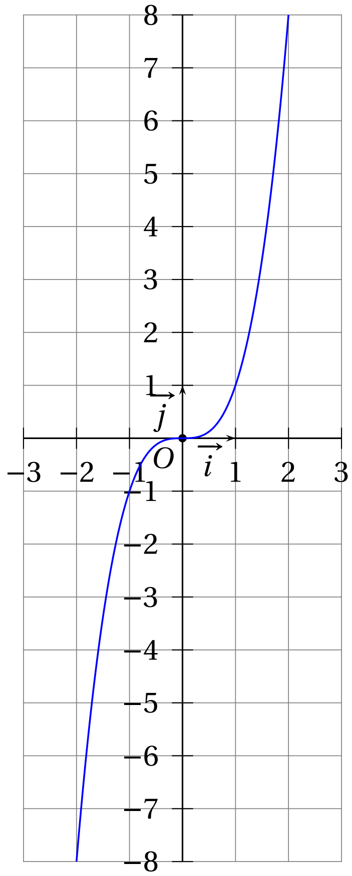
Voici son tableau de variation et sa courbe représentative :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$



Remarque : La courbe représentative de h est une hyperbole de sommet O.
La courbe est symétrique par rapport à l'origine O, on dit que h est impaire.

4) La fonction $g : x \longmapsto x^3$



La fonction *cube* est définie sur $\mathbb{R}$.

Voici son tableau de variation et sa courbe représentative :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	

Remarque : La courbe est symétrique par rapport à l'origine, g est impaire.

5) la fonction $k : x \longmapsto \sqrt{x}$

La fonction *racine* est définie sur $[0\,;+\infty[$.

Voici son tableau de variation et sa courbe représentative

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0 $\nearrow$