Activité sur les inéquations

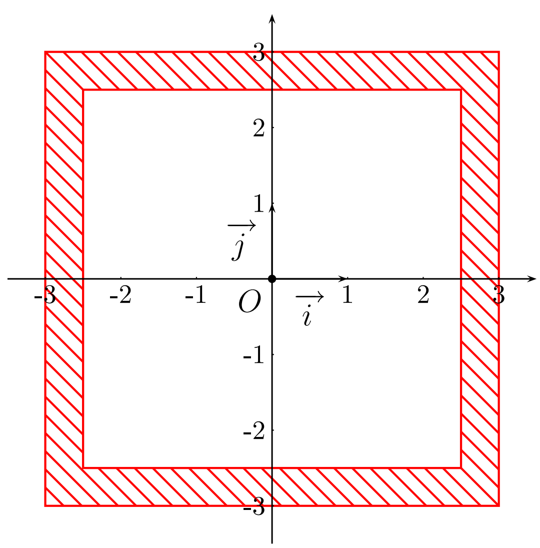
On désire placer une fontaine carrée au centre d'un espace clôt, carré lui aussi, de largeur six mètres dont les murs ont une épaisseur de cinquante centimètres.
Pour des raisons d'harmonie on veut que la surface restante après positionnement soit entre 9 et 16 mètres carrés.

Le but de cette activité est de déterminer quelles sont les dimensions possibles pour cette fontaine.

I. Modélisation

Dans le repère $\left(O\,;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ d'unite graphique 1 cm pour 1m on a représenté le mur bordant la pièce.
Soit M le point de coordonnées $(x;x)$ intérieur à la pièce (x peut être négatif).

1) Placer un point M.
2) Tracer le carré de centre O dont M est l'un des sommets.
   Ce carré représentera la fontaine.
3) Quelles sont les valeurs possibles pour x?
4) Déterminer, en fonction de x, l'aire de la fontaine. En déduire l'aire $A(x)$ restante au sol.



II. Résolution du problème

1) Traduire en langage mathématique le problème à l'aide de $A(x)$.

   Pour comparer deux nombres a et b on étudie le signe de leur différence $a-b$.

2) Réécrire les deux inéquations.

   Pour chercher le signe d'une expression on factorise cette expression.

   Dans notre cas on est ainsi amené à résoudre $4(2-x)(2+x) \geqslant 0$ c'est-à-dire $(2-x)(2+x) \geqslant 0$. Pour déterminer le signe d'un produit de facteurs on cherche le signe de chacun des facteurs c'est-à-dire qu'on résout (*séparément*) les deux inéquations $2-x \geqslant 0$ et $2+x \geqslant 0$:

$$\begin{array}{r|l} 2-x \geqslant 0 & 2+x \geqslant 0 \\ -x \geqslant -2 & x \geqslant -2 \\ x \leqslant 2 & \end{array}$$

   et une fois que l'on connaît le signe de chacun des facteurs en fonction de x, on peut centraliser ces informations dans un ***tableau de signes*** puis déterminer l'ensemble solution de l'inéquation produit :

x	$-2,5$		-2		2		$2,5$
$(2-x)$		+	|	+	0	-	
$(2+x)$		-	0	+	|	+	
$(2-x)(2+x)$		-	0	+	0	-	

   Ainsi on *lit* dans le tableau de signes l'ensemble solution de $(2-x)(2+x) \geqslant 0$:

$$[-2;2].$$

3) Résoudre en faisant de même l'autre inéquation.
4) A l'aide d'une droite graduée déterminer l'ensemble solution de la double inégalité du début de la question 1).
5) Conclure.