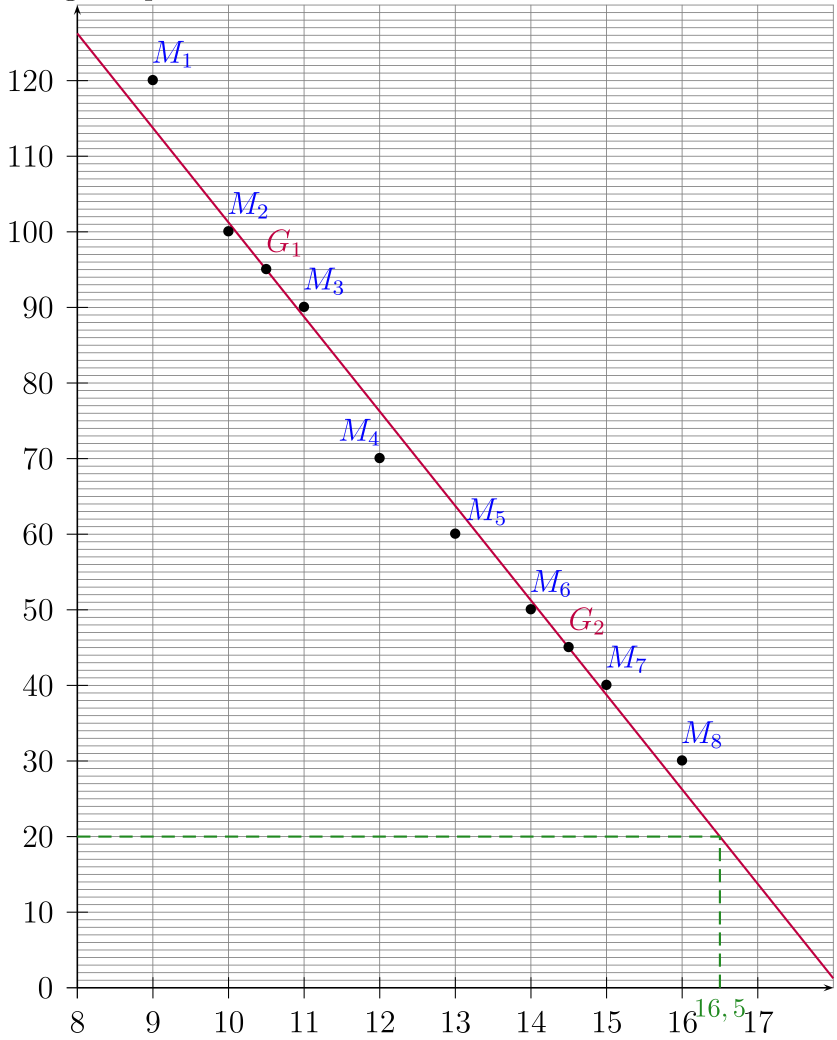
Corrigé devoir Maison 4

Exercice 1 : *Statistiques*

1) On trace le nuage de points :



2) *a)* On calcule les coordonnées de G_1 et G_2 :
$G_1\left(\dfrac{9+10+11+12}{4}\ ,\ \dfrac{120+100+90+70}{4}\right)$ et $G_2\left(\dfrac{13+14+15+16}{4}\ ,\ \dfrac{60+50+40+30}{4}\right)$
c'est-à-dire $G_1\,(10,5\ ,\ 95)$ et $G_2\,(14,5\ ,\ 45)$.
On place les points G_1 et G_2 et on trace la droite (G_1G_2).

b) Graphiquement on utilise la droite (G_1G_2) pour estimer le prix maximum pour qu'il y ait au moins 20 acheteurs potentiels : c'est $16,5$€.

3) *a)* On calcule le coefficient directeur de (G_1G_2) : $\dfrac{95-45}{10,5-14,5} = -12,5$ donc l'équation de (G_1G_2) s'écrit $y = -12,5x + b$ et comme G_1 est sur la droite ses coordonnées sont solution de l'équation : $95 = -12,5 \times 10,5 + b$ et donc $b = 95 + 131,25 = 226,25$ et ainsi l'équation de (G_1G_2) est donc $y = -12,5x + 226,25$.

b) Si le prix est fixé à 8 € alors le nombre d'acheteurs est $-12,5 \times 8 + 226,25$ c'est-à-dire $126,25$. C'est un nombre d'acheteurs, on peut donc arrondir à 126.
La recette serait alors 8×126 c'est-à-dire 1008 €.

Exercice 2 : *Etude de fonction*

Partie A - Etude d'une fonction auxiliaire

1) On calcule g' : $g'(x) = 2 \times 2\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^{x} = 4\left(\mathrm{e}^{x}\right)^2 - 5\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}\left(4\mathrm{e}^{x} - 5\right)$.
2) Pour trouver les variations de g on cherche le signe de g'.
Puisque e^{x} est toujours positif le signe de g' est donné par celui de $4\mathrm{e}^{x} - 5$.
0n doit donc résoudre $4\mathrm{e}^{x} - 5 \geqslant 0$: $4\mathrm{e}^{x} \geqslant 5$ puis $\mathrm{e}^{x} \geqslant \dfrac{5}{4}$ et enfin $x \geqslant \ln\left(\dfrac{5}{4}\right)$.
On peut à présent établir le tableau de variations de g :

x	0		$\ln\left(\frac{5}{4}\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{9}{8}$	$\nearrow$	

D'après le tableau de variations de g le minimum est atteint en $\ln\left(\dfrac{5}{4}\right)$, il vaut alors :
$2\mathrm{e}^{2\ln\left(\frac{5}{4}\right)} - 5\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{5}{4}\right)} + 2 = 2\mathrm{e}^{\ln\left(\left(\frac{5}{4}\right)^2\right)} - 5 \times \dfrac{5}{4} + 2 = 2\dfrac{25}{16} - \dfrac{25}{4} + 2 = \dfrac{25 - 50 + 16}{8} = -\dfrac{9}{8}$.
3) La fonction g est strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$. De plus $g\left(\dfrac{1}{2}\right) \approx -0,81$ et $g(1) \approx 3,2$ donc ils sont de signe contraires et par conséquent l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution, notée x_0, sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$.
4) On a $g\big(\ln(2)\big) = 2\mathrm{e}^{2\ln(2)} - 5\mathrm{e}^{\ln(2)} + 2 = 2\mathrm{e}^{\ln(4)} - 5 \times 2 + 2 = 2 \times 4 - 10 + 2 = 8 - 8 = 0$. De plus $\ln(2) \approx 0,69$ il est donc dans $\left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$. Puisque x_0 est l'unique solution de $g(x) = 0$ sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;1\right]$ on a bien $x_0 = \ln(2)$.
5) La fonction g étant croissante, pour tout $x \geqslant x_0$ on a $g(x)$ est positif.

Partie B - Etude de la fonction

1) On peut écrire $f(x) = 1 + 2x + \dfrac{\mathrm{e}^{x} - 1 + 1}{\mathrm{e}^{x} - 1} = 1 + 2x + \dfrac{\mathrm{e}^{x} - 1}{\mathrm{e}^{x} - 1} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x} - 1} = 2 + 2x + \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x} - 1}$.

2) On calcule f' à partir de l'expression de f ci-dessus : $f'(x) = 2 - \dfrac{\left(e^x - 1\right)'}{\left(e^x - 1\right)^2} = 2 - \dfrac{e^x}{\left(e^x - 1\right)^2} = \dfrac{2\left(e^x - 1\right)^2 - e^x}{\left(e^x - 1\right)^2} = \dfrac{2(e^{2x} - 2e^x + 1) - e^x}{\left(e^x - 1\right)^2} = \dfrac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$.

3) Puisqu'un carré est toujours positif le signe de $f'(x)$ est donné par celui de g, lui-même donné par la question 5) de la **partie A**. On a ainsi le tableau de signes suivant :

x	0		$\ln(2)$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

4) On peut déduire de la question précédente les variations de f :

x	0		$\ln(2)$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	$3 + 2\ln(2)$	$\nearrow$	

On a par ailleurs $f\big(\ln(2)\big) = 2 + 2\ln(2) + \dfrac{1}{e^{\ln(2)} - 1} = 2 + 2\ln(2) + \dfrac{1}{2 - 1} = 3 + 2\ln(2)$.

5) On trace la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente (horizontale) au point d'abscisse $\ln(2)$.