

Chap 6:

Fonctions affines et droites

Dans tout le chapitre on munit le plan d'un repère quelconque $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

I. Fonctions affines

1) Définitions

Définition 1 : On appelle *fonction affine* toute fonction du type $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax + b \end{cases}$
 où a et b sont deux nombres réels fixés.
 Sa courbe représentative \mathcal{C}_f est une droite oblique.
 a s'appelle le *coefficient directeur* de \mathcal{C}_f ,
 b s'appelle *l'ordonnée à l'origine* de \mathcal{C}_f .

Exemple : $f(x) = 2x - 3$, $f(x) = -x \dots$

Remarque : Si $a = 0$, on parle de *fonction constante* : $f(x) = b$.
 Si $b = 0$, on parle de *fonction linéaire* : $f(x) = ax$.

2) Coefficient directeur

Définition 2 : Soit g une fonction quelconque définie sur un intervalle I , u et v deux nombres de I .
 On appelle *taux de variation* de g entre u et v le nombre $\frac{g(v) - g(u)}{v - u}$.

Exemple : Prenons la fonction $g(x) = x^2 + 1$ définie sur \mathbb{R} .
 Déterminer le taux de variation de g entre 0 et 2, entre 1 et 3 puis entre -1 et 0.

$$\text{On a } \frac{g(2) - g(0)}{2 - 0} = \frac{5 - 1}{2} = 2, \quad \frac{g(3) - g(1)}{3 - 1} = \frac{10 - 2}{2} = 4$$

$$\text{et } \frac{g(0) - g(-1)}{0 - (-1)} = \frac{1 - 2}{1} = -1.$$

Remarque : A priori un taux de variation d'une fonction dépend des valeurs de u et v .

La notion de taux de variation permet de **caractériser** les fonctions affines :

Théorème 1 : • Si f est une fonction affine alors le taux de variation entre deux nombres quelconques est toujours le même et c'est exactement le coefficient directeur de \mathcal{C}_f .

C'est à dire que si $f(x) = ax + b$ alors on a :
$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} = a$$
 pour tous les u et v ($u \neq v$).

- Réciproquement, si f est une fonction définie sur \mathbb{R} telle que :
pour tous les u et v on a
$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} = cste, \text{ (on l'appelle } a)$$
 alors f est une fonction affine et son coefficient directeur est a .

On a également une propriété sur les variations des fonctions affines :

Proposition 1 : Si f est une fonction affine de coefficient directeur a alors :

- f est croissante sur \mathbb{R} si et seulement si a est positif.
- f est décroissante sur \mathbb{R} si et seulement si a est négatif.

3) fonctions affines et droites représentatives

Il faut savoir tracer la courbe \mathcal{C}_f à partir de l'expression de la fonction : $f(x) = ax + b$.

- soit en utilisant l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur,
- soit en cherchant les coordonnées de deux points de la droite \mathcal{C}_f

il faut de même savoir retrouver l'expression de f ($f(x) = ax + b$) à partir du tracé de \mathcal{C}_f .

- soit en relevant l'ordonnée à l'origine b et en calculant un taux de variation qui donnera le coefficient directeur a ,
- soit en relevant les coordonnées de deux points de la droite \mathcal{C}_f et en tirant un système 2×2 aux inconnues a et b qu'il faut alors résoudre.

→ à voir en TD.

II. Droites

1) Equations de droites

Il y a deux types d'équations de droites suivant qu'elles soient verticales ou non :

- Définition 3 :**
- Si la droite (D) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, elle admet une équation du type $y = ax + b$ où a et b sont des constantes.
 (D) est la courbe représentative de la fonction affine $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax + b \end{cases}$.
 - Si la droite (D) est parallèle à l'axe des ordonnées, elle admet une équation du type $x = c$ où c est une constante.

Remarque : On peut également avoir une *équation cartésienne* de la droite (D) avec une équation du type : $ax + by + c = 0$.

L'intérêt est qu'on n'a pas à distinguer si la droite (D) est parallèle à l'axe des ordonnées ou non.

On peut retrouver avec cette équation les deux types d'équations précédentes.

2) Parallélisme

- Proposition 2 :**
- Deux droites d'équations $x = c$ et $y = ax + b$ ne sont jamais parallèles.
 - Deux droites d'équations $x = c$ et $x = c'$ sont toujours parallèles
(et parallèles à l'axe des ordonnées).
 - Deux droites d'équation $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$ sont parallèles si et seulement si $a = a'$.

Remarque : C'est surtout le dernier cas dont on se sert dans les exercices.