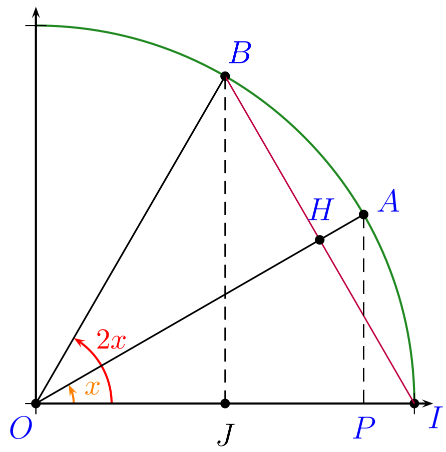
Corrigé devoir Maison 6

Exercice 1 : *Une formule pour* $\sin(2x)$

1) On fait une figure.

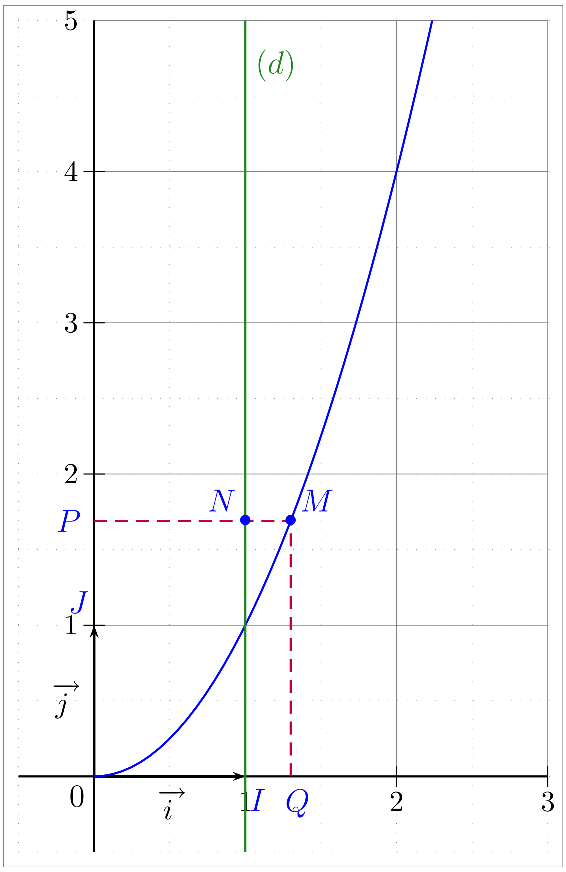


2) On appelle J le projeté orthogonal de B sur (OI) l'aire $\mathscr{A}_1$ vaut alors $\dfrac{1}{2} \times OI \times BJ$. On a de plus $OI = 1$ et BJ est l'ordonnée de J soit par définition $\sin(2x)$. On a ainsi $\mathscr{A}_1 = \dfrac{1}{2}\ \sin(2x)$.
Le triangle OAP est rectangle en P donc $\mathscr{A}_2 = \dfrac{1}{2} \times OP \times BP$. De plus on a $OP = \cos(x)$ et $BP = \sin(x)$ donc $\mathscr{A}_2 = \dfrac{1}{2}\ \sin(x)\cos(x)$.
3) Le triangle OIB est isocèle en O par conséquent la bissectrice (OH) est aussi médiatrice dans ce triangle (on a donc H milieu de $[IB]$) et donc (OH) est perpendiculaire à (IB).
Il suit alors que les triangles OIH et OHB sont rectangles et puisque H est le milieu de (IB), ces deux triangles ont même aire.
4) Les longueurs OI et OA sont égales et les triangles <u>rectangles</u> OIH et OAP ont l'angle $\widehat{AOP}$ en commun, par conséquent ces deux triangles sont isométriques et ont donc même aire.
5) L'aire du triangle OIB est égale à la somme de celles de OIH et OHB c'est-à-dire à deux fois celle de OIH et donc à deux fois celle de OAP.
Autrement dit $\mathscr{A}_1 = 2\mathscr{A}_2$.
6) De $\mathscr{A}_1 = 2\mathscr{A}_2$ on tire $\dfrac{1}{2}\ \sin(2x) = 2 \times \dfrac{1}{2}\ \sin(x)\cos(x)$ puis $\sin(2x) = 2\cos(x)\ \sin(x)$.
En fait cette formule est vraie pour n'importe quelle valeur de x réel.

Exercice 2 : *Comparaison de x^2 et x^3*

Partie A : avec la géométrie

1) On trace dans le repère orthonormal $\left(O\,;\ \overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OJ}\right)$ la parallèle (d) à l'axe des ordonnées passant par I ainsi que la parabole d'équation $y = x^2$.



2) *a)* On compléte la figure.

b) Par constrution (OQ) et (OJ) sont parallèles et de même pour (OP) et (OI), le quadrilatère $OQMP$ est donc un parallélogramme. De plus l'angle $\widehat{IOJ}$ est droit donc le quadrilatère $OQMP$ est un rectangle.
Son aire vaut donc $OQ \times OP = x \times x^2 = x^3$.

c) Le rectangle $OINP$ a pour « largeur » OI qui vaut 1 et pour « longueur » OP qui vaut x^2 par conséquent son aire vaut bien x^2.

d) On constate sur le graphique que la comparaison des aires des deux rectangles dépend de la position de M par rapport à la droite (d) : si M est à gauche de (d) c'est-à-dire si $x < 1$ alors l'aire de $OQMP$ est plus petite que celle de $OINP$ et si $x > 1$ c'est le contraire.
Si x est dans $]0\,;1[$: $\quad x^3 < x^2$ et si x est dans $]1\,;+\infty[$: $\quad x^3 > x^2$.

Partie B : avec l'algèbre

1) On factorise la différence $x^3 - x^2$: $\quad x^3 - x^2 = x^2(x-1)$.

2) Le signe de cette différence est donné par la règle sur le produit des signes.
Il nous faut donc déterminer le signe de chacun des facteurs et donc résoudre chaque des inéquations suivantes :

$$\begin{array}{c|c} x^2 \geqslant 0 & x - 1 \geqslant 0 \\ \text{tout } x & x \geqslant 1 \end{array}$$

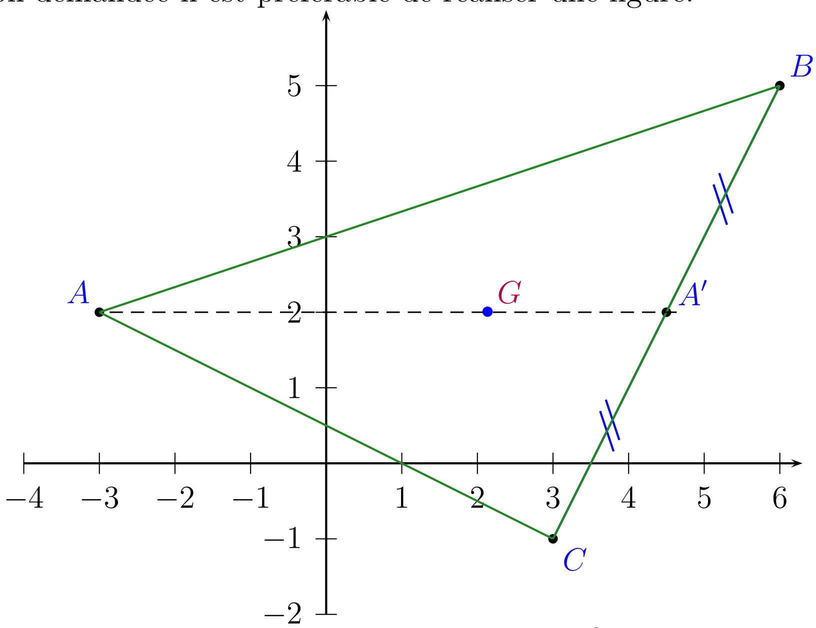
On peut alors remplir un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$(x-1)$		-		-	0	$+$	
$x^3 - x^2$		-	0	-	0	$+$	

De ce tableau on déduit que si x est dans $]-\infty\,;1[$ (sauf en 0) alors $x^3 > x^2$ et si x est dans $]1\,;+\infty[$ alors $x^3 < x^2$.

Exercice 3 : *Centre de gravité*

Bien que non demandée il est préférable de réaliser une figure.



1) On appelle A' le milieu de $[BC]$. On a alors $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\,\overrightarrow{AA'}$.
2) On appelle $(x\,;\,y)$ les coordonnées de G.

Des coordonnées de B et C on tire celles de A' : $A'\left(\dfrac{6+3}{2}\,;\,\dfrac{5-1}{2}\right)$ c'est-à-dire $A'\left(\dfrac{9}{2}\,;\,2\right)$. On a alors $\overrightarrow{AA'}\left(\dfrac{9}{2}-(-3)\,;\,2-2\right)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AA'}\left(\dfrac{15}{2}\,;\,0\right)$.

Puis on a $\dfrac{2}{3}\,\overrightarrow{AA'}\left(\dfrac{2}{3}\times\dfrac{15}{2}\,;\,\times\dfrac{2}{3}\times 0\right)$ c'est-à-dire $\dfrac{2}{3}\,\overrightarrow{AA'}\,(5\,;\,0)$.

On a par ailleurs $\overrightarrow{AG}\big(x-(-3)\,;\,y-2\big)$ donc de l'égalité $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\,\overrightarrow{AA'}$ on tire le système $\begin{cases} x+3=5 \\ y-2=0 \end{cases}$.

Ainsi il suit que $x=2$ et $y=2$ c'est-à-dire $G(2\,;\,2)$.