Chap 7 :

Dérivation

I. Nombre dérivé

Dans toute cette partie on prend une fonction f définie (au moins) sur un intervalle I. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1) Définition

On rappelle la définition du *taux de variation* d'une fonction f entre deux points a et b de son ensemble de définition.

Définition 1 : Soit f définie sur un intervalle I, a et b deux nombres de I.
On appelle taux de variation de f entre les points a et b le rapport $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

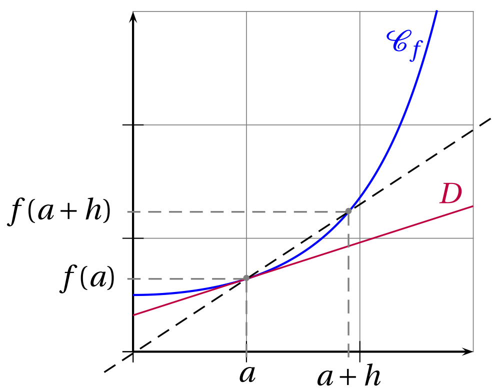
On peut à l'aide du taux de variation définir le *nombre dérivé de f en a* où a est un point de I.

Définition 2 : On dit que f est *dérivable* en a si le taux de variation de f entre a et $a+h$ (où h est un nombre réel « petit ») a une limite finie lorsque h tend vers 0
c'est-à-dire $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie.
Cette limite est appelée *nombre dérivé* de f en a. Elle est notée $f'(a)$.

Exemple : on prend $f(x)=x^2$ et $a=1$: $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{(1+h)^2-1}{h}=\dfrac{h^2+2h}{h}=h+2$ et donc $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(h+2)=2$.

2) Tangente à une courbe

Définition 3 : On appelle *tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en a* la droite qui « touche » $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a en « collant » à la courbe.
Cette droite D est la droite qui passe par le point de coordonnées $(a; f(a))$ et dont le coefficient directeur est $f'(a)$.
Une équation de cette tangente est
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$.
$\longrightarrow$ *démonstration*



Remarque : De la définition on tire la propriété : si f est dérivable en a alors $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

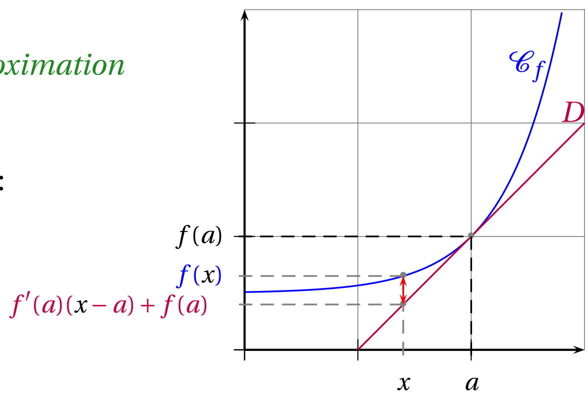
$\longrightarrow$ *démonstration*

3) Approximation affine

On peut se faire une idée «approximative» d'une fonction au voisinage d'un point à l'aide du nombre dérivé. On parle *d'approximation affine* de f en a .

Définition 4 : Si f est dérivable en a on appelle *approximation affine* de f en a la fonction $x \longrightarrow f'(a)(x-a) + f(a)$.
Pour tous les x «proches de a» on a :

$$f(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a).$$



II. Fonction dérivée

1) Définition

Définition 5 : Soit f une fonction définie sur I .
On dit que f est *dérivable sur I* si f est dérivable en tout point de I .
On appelle *fonction dérivée* de f la fonction $f' : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array} \right.$.

Remarque : Autrement dit toute fontion dont la courbe a une tangente en tous les points est dérivable.
Certaines fonctions, comme par exemple $x \to |x|$ ne sont dérivable partout, ici la courbe n'admet pas de tangente en 0 .

2) Fonctions de référence

Il existe toute une liste de fonctions dérivées à connaitre ***par coeur*** :

Proposition 1 : Soit $f(x) = \alpha x + b$ définie sur $\mathbb{R}$ (α et β réels fixés).
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \alpha$.

$\longrightarrow$ *démonstration*

Remarque : On a notamment que les fonctions constantes ont une fonction dérivée nulle.

Proposition 2 : Soit $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$.

$\longrightarrow$ *démonstration*

De manière plus générale on a :

Proposition 3 : Soit n un entier et $f(x) = x^n$ définie sur $\mathbb{R}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = nx^{n-1}$.

$\longrightarrow$ *démonstration par récurrence.*

Proposition 4 : Soit $f(x) = \dfrac{1}{x}$ définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.
f est dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

$\longrightarrow$ *démonstration*

De manière plus générale on a :

Proposition 5 : Soit n un entier et $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.
f est dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ et $f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$.

$\longrightarrow$ *démonstration par récurrence.*

Proposition 6 : Soit $f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$.
f est dérivable sur $]0;+\infty[$ (et pas en 0) et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$\longrightarrow$ *démonstration*

Proposition 7 : Soit $f(x)=\sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\cos(x)$.

⟶ *démonstration (admis)*

Proposition 8 : Soit $f(x)=\cos(x)$ définie sur $\mathbb{R}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=-\sin(x)$. *(Attention au signe $-$)*

⟶ *démonstration (admis)*

3) Opérations sur les fonctions

On a des propriétés très pratiques pour pouvoir dériver n'importe quelle fonction à l'aide des dérivées des fonctions de référence.

Proposition 9 : Soit k un nombre réel et f une fonction définie et dérivable sur I.
Alors $k\times f$ est dérivable sur I et $(kf)'(x)=kf'(x)$.
On note souvent $(k\times f)'=kf'$.

⟶ *démonstration*

Proposition 10 : Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur I.
Alors $f+g$ est dérivable sur I et $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$.
On note souvent $(f+g)'=f'+g'$.

⟶ *démonstration*

Proposition 11 : Soit f et g deux fonctions définies et dérivables sur I.
Alors $f\times g$ est dérivable sur I et $(f\times g)'(x)=f'(x)\times g(x)+f(x)\times g'(x)$.
On note souvent $(f\times g)'=f'\times g+f\times g'$.

⟶ *démonstration*

Remarque : On a notamment $(f^2)'=2f'\times f$.

Proposition 12 : Soit f une fonction définie, dérivable sur I et qui ne s'annule pas sur I.
Alors $\frac{1}{f}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{f}\right)'(x)=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$.
On note souvent $\left(\frac{1}{f}\right)'=-\frac{f'}{f^2}$.

⟶ *démonstration*

Proposition 13 : Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur I. Si g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)\times g(x) - f(x)\times g'(x)}{g^2(x)}$.

On note souvent $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'\times g - f\times g'}{g^2}$.

⟶ *démonstration*

Proposition 14 : Soit f une fonction définie et dérivable sur I, α $(\alpha \neq 0)$ et β deux réels.
Soit J l'intervalle formé par les x tels que $\alpha x + \beta$ soit dans I.
La fonction $g : x \longrightarrow f(\alpha x + \beta)$ est dérivable sur J et $g'(x) = \alpha \times f'(\alpha x + \beta)$.

⟶ *démonstration (admis)*

III. Sens de variations

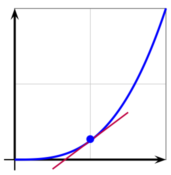
On dispose d'un théorème fondamental pour l'étude des fonctions, il fait un lien entre le signe de la fonction dérivée f' et le sens de variations de la fonction f.

Théorème 1 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f' = 0$ sur I, alors f est constante sur I.
- Si $f' > 0$ sur I, sauf en un nombre fini de réels, alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f' < 0$ sur I, sauf en un nombre fini de réels, alors f est strictement décroissante sur I.

⟶ *démonstration (admis)*

Remarque : Ce résultat ne choque pas l'intuition car si en un point de la courbe $(x_0; f(x_0))$ le nombre dérivé $f'(x_0)$ est positif alors, « autour » de ce point, la fonction est croissante *(car c'est le coefficient directeur de la tangente)*. Et donc si la dérivée est positive sur I, f est bien croissante sur I.



Dans la pratique, pour déterminer les variations d'une fonction f, on calcule sa dérivée f', on en cherche le signe (en factorisant le plus possible f') et on découpe son ensemble de définition en intervalles sur lesquels f' est de signe constant. On peut alors mettre les résultats dans le tableau de variations de f.

Exemple : Prenons la fonction $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.
On a $f'(x) = 2x$ d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

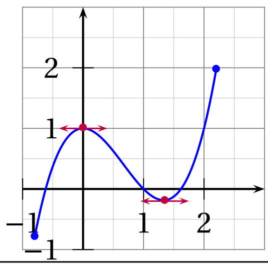
IV. Extrema locaux

1) définition

Définition 6 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit c un réel intérieur à I.
(c distinct des bornes de I).

- On dit que f présente un *maximum local* en c si $f(c)$ est le maximum de f « autour » de c.
- On dit que f présente un *minimum local* en c si $f(c)$ est le minimum de f « autour » de c.
- Un *extremum local* est un maximum local ou un minimum local.

Remarque : L'exemple ci-contre présente un minimum et un maximum globaux (qui sont aux bornes de l'intervalle de définition) ainsi qu'un minimum et un maximum locaux.
Il faut bien distinguer les deux types d'extrema.



2) une condition nécessaire

Théorème 2 : Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Si f admet un extremum local en c , alors $f'(c) = 0$.

$\longrightarrow$ *démonstration*

Remarque : Cette propriété sert à trouver des minima ou des maxima (locaux) pour certains problèmes sans passer par l'étude complète d'une fonction.

Remarque : Cette propriété n'est pas vraie dans les deux sens, ce n'est qu'une *implication* .
En effet, par exemple, la fonction cube $f(x) = x^3$ est telle que $f'(0) = 0$ mais f n'admet pas d'extremum local en 0 .