Chap 6 :

Limites et asymptotes

I. Limites en l'infini

1) Limite infinie à l'infini

Définition 1 : Soit f une fonction définie *au moins* sur un intervalle du type $[\alpha\,;+\infty[$:
(c'est-à-dire que $f(x)$ existe pour x suffisamment grand)
On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès que x est assez grand.
(Lorsqu'on dit grand, on sous-entend positif).

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$.

On définit de même $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ par $f(x)$ est aussi grand dans les négatifs que l'on veut dès que x est assez grand.

On définit encore de manière analogue : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.
(attention toutefois à l'ensemble de définition).

Exemple : $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$.

2) Limite finie à l'infini

Définition 2 : Soit f une fonction définie *au moins* sur un intervalle du type $[\alpha\,;+\infty[$:
(c'est-à-dire que $f(x)$ existe pour x suffisamment grand)
On dit que f a pour limite l en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ si $f(x)$ est aussi proche de l que l'on veut dès que x est assez grand.
On définit de même : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$.

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}+1\right)=1$.

Remarque : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-l)=0 \Leftrightarrow f(x)=l+\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon(x)=0$.

Remarque : Une fonction n'a pas nécessairement de limite (finie ou infinie) lorsque x tend vers $+\infty$: par exemple f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)$ n'a de limite ni en $-\infty$ ni en $+\infty$.

II. Limite en un point $a \in \mathbb{R}$

1) Limite infinie en $a \in \mathbb{R}$

Définition 3 : Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle « touchant » a :
(pour que $f(x)$ existe pour x aussi proche qu'on veut de a)
Si $f(x)$ est aussi grand (positif) que l'on veut dès que x est assez proche de a, on dit que f a pour limite $+\infty$ en a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.
On définit de même $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Exemple : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$.

Remarque : Dans la pratique pour déterminer une limite quand x tend vers a on se ramène souvent à une limite quand h tend vers 0 en posant $x = a + h$.
On a par exemple $\lim\limits_{x \to 1} \left(1 + \dfrac{1}{(x-1)^2}\right) = \lim\limits_{h \to 0} \left(1 + \dfrac{1}{h^2}\right) = +\infty$.

2) Limite à gauche et à droite en a

Définition 4 : On parle de *limite à gauche* de a pour $f(x)$ lorsque on calcule la limite de $f(x)$ en a mais que pour les $x < a$.
On définit de même la *limite à droite* de a pour $f(x)$ avec la limite pour les $x > a$.
On les note souvent $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

Exemple : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$ ou encore $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x^3} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \dfrac{1}{x^3} = -\infty$.

III. Opérations sur les limites

On retrouve les tableaux similaires à ceux sur les limites de suites.
Dans toute cette partie les limites des fonctions f et g sont prises aux mêmes «points» à savoir : $+\infty$, $-\infty$ ou $a \in \mathbb{R}$.

1) Somme

On a le tableau récapitulatif suivant :

$\lim f(x) =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g(x) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\left(f(x)+g(x)\right) =$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	*F.I*

2) Produit

On a le tableau récapitulatif suivant :

$\lim f(x) =$	l	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim g(x) =$	l'	$+\infty$		$-\infty$		$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\left(f(x)\times g(x)\right) =$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	*F.I*

3) Quotient

On a le tableau récapitulatif suivant :

$\lim f(x) =$	l	l	$+\infty$		$-\infty$		$\pm\infty$	$l<0$ ou $-\infty$		$l>0$ ou $+\infty$		0
$\lim g(x) =$	$l'\neq 0$	$\pm\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-	0
$\lim\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) =$	$\dfrac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	*F.I*	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	*F.I*

Remarque :
- Dans le tableau précédent 0^+ (resp. 0^-) indique que la limite est nulle et que la fonction reste positive (resp. négative).
- Il y a au total quatre formes indéterminées : $+\infty-\infty$; $0\times\infty$; $\dfrac{\infty}{\infty}$ et $\dfrac{0}{0}$

Remarque : Avec ces règles de calcul et quelques transformations on peut trouver *n'importe quelle* limite.

Exemple : On cherche $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-3x^2+4x+1\right)$.
Si on voit ce polynôme comme une somme de monômes on obtient une F.I. du type $+\infty-\infty$ mais on peut toujours écrire $x^3-3x^2+4x+1=x^3\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)=1-0+0+0=1$ par somme des limites.
On a donc, par produit des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-3x^2+4x+1\right)=+\infty$ vu comme « $1\times+\infty$ ».

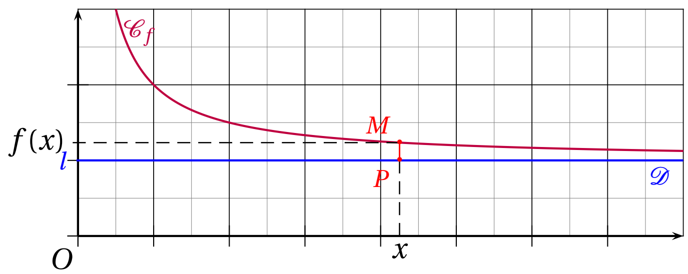
⟶ on traitera en TD tous les cas pour les polynômes et les fractions rationnelles.

IV. Interprétation graphique et asymptotes

1) Asymptote horizontale

Si $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$,
pour $M\left(x;f(x)\right)$ et $P(x;l)$ les points d'abscisses x, lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, la distance PM tend vers 0 :
On dit alors que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=l$ est *asymptote horizontale* à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

Interprétation graphique pour $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$.

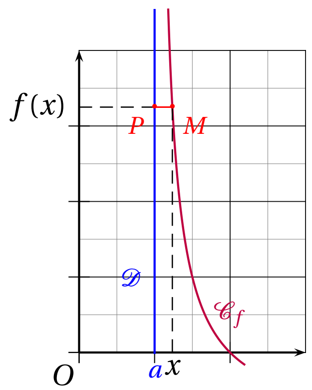


Remarque : On peut définir de même l'asymptote d'équation $y=l$ en $-\infty$ si $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=l$.

2) Asymptote verticale

Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\pm\infty$,
on dit que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x=a$ est *asymptote verticale* à la courbe $\mathscr{C}_f$.
Les points $M\left(x;f(x)\right)$ et $P\left(a;f(x)\right)$ sont ici les deux points de même ordonnée et la distance PM tend vers zéro lorsque cette ordonnée de P et M tend vers $+\infty$.

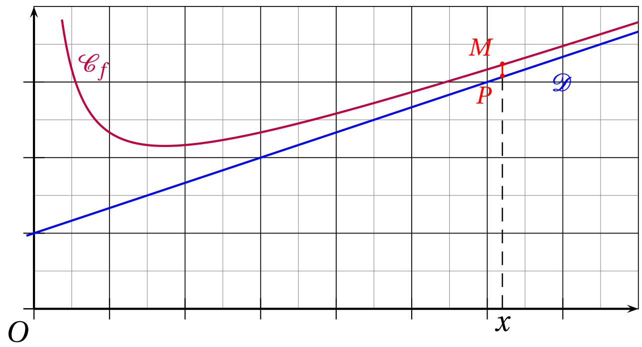
Interprétation graphique pour $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$.



3) Asymptote oblique

Définition 5 : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[\alpha; +\infty[$, s'il existe deux réels a et b tels que $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ on dira que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = ax + b$ est *asymptote oblique* à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

Interprétation graphique, avec $M\big(x; f(x)\big)$ et $P(x; ax+b)$ les deux points d'abscisses x, pour $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$.



On peut de même définir une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ si $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$.

Remarque :
- La méthode de détermination est H.P.
- On a nécessairement $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.