Corrigé Devoir Maison 2

Exercice 1 : *Equations et inéquations*

1) On résout l'équation $3x^2+2x-5=0$:
pour cela on calcule son discriminant Δ : $\Delta = 2^2-4\times3\times(-5) = 4+60 = 64$.
Il est positif donc l'équation a deux solutions qui sont $x_1 = \dfrac{-2-8}{2\times3}$ et $x_2 = \dfrac{-2+8}{2\times3}$ c'est-à-dire $x_1 = -\dfrac{10}{6} = -\dfrac{5}{3}$ et $x_2 = 1$.
L'équation a pour solutions $-\dfrac{5}{3}$ et 1 .

2) On résout l'équation $\dfrac{1}{4}x^2+3x+9=0$:
pour cela on calcule son discriminant Δ : $\Delta = 3^2-4\times\dfrac{1}{4}\times9 = 9-9 = 0$.
Il est nul donc l'équation a une solution qui est $x = -\dfrac{3}{2\times\frac{1}{4}} = -\dfrac{3}{\frac{1}{2}} = -3\times\dfrac{2}{1} = -6$.
L'équation a pour solution -6 .

3) On résout l'inéquation $-4x^2+8x-2 \leqslant 0$:
pour cela on calcule son discriminant Δ : $\Delta = 8^2-4\times(-4)\times(-2) = 64-32 = 32$.
Il est positif donc le trinôme a deux racines qui sont $x_1 = \dfrac{-8-\sqrt{32}}{2\times(-4)}$ et $x_2 = \dfrac{-8+\sqrt{32}}{2\times(-4)}$ c'est-à-dire $x_1 = \dfrac{8+4\sqrt{2}}{8} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{8-4\sqrt{2}}{8} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$.
On sait que le trinôme est négatif à l'extérieur des racines donc
l'ensemble solution de l'inéquation est $\left]-\infty;\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{2+\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$.

4) On résout l'inéquation $3x^2-6x+5 \leqslant 0$:
pour cela on calcule son discriminant Δ : $\Delta = (-6)^2-4\times3\times5 = 36-60 = -24$.
Il est négatif donc le trinôme est toujours positif.
Autrement dit l'inéquation n'a pas de solution .

5) On résout l'inéquation $-3x^2-2(x-1) \geqslant -x(x+4)-2$ en réarrangeant l'inéquation :
$$\begin{aligned} -3x^2-2(x-1) &\geqslant -x(x+4)-2 \\ -3x^2-2x+2 &\geqslant -x^2-4x-2 \\ -3x^2+x^2-2x+4x+2+2 &\geqslant 0 \\ -2x^2+2x+4 &\geqslant 0. \end{aligned}$$
pour résoudre cette dernière on calcule son discriminant Δ : $\Delta = 2^2-4\times(-2)\times4 = 4+32 = 36$.
Il est positif donc le trinôme $-2x^2+2x+4$ a deux racines qui sont $x_1 = \dfrac{-2-6}{2\times(-2)}$ et $x_2 = \dfrac{-2+6}{2\times(-2)}$ c'est-à-dire $x_1 = 2$ et $x_2 = -1$.
Le trinôme est positif à l'intérieur des racines autrement dit
l'ensemble solution de l'inéquation de départ est $[-1;2]$.

Exercice 2 : *Etude de polynôme*

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par
$P(x) = 2x^3 - x^2 - 15x + 18$.

1) On calcule $P(-1)$:
$P(-1) = 2\times(-1)^3 - (-1)^2 - 15\times(-1) + 18 = -2 - 1 + 15 + 18 = 30$.
L'image par P de -1 est 30 .
On calcule $P(1)$:
$P(1) = 2\times 1 - 1 - 15 + 18 = 4$
L'image par P de 1 est 4 .
On calcule $P(2)$:
$P(2) = 2\times 2^3 - 2^2 - 15\times 2 + 18 = 16 - 4 - 30 + 18 = 0$.
L'image par P de 2 est 0 .
2) 2 est une racine de P donc P est factorisable par $(x-2)$.
Et comme P est de degré 3 il existe trois constantes a, b et c, telles que $P(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$.
3) On développe $(x-2)(ax^2 + bx + c)$:
$(x-2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - 2ax^2 - 2bx - 2c = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$.
Par identification des coefficients avec ceux de P, les deux polynômes étant égaux, on a :
$$\begin{cases} a = 2 \\ b - 2a = -1 \\ c - 2b = -15 \\ -2c = 18 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b - 4 = -1 \\ c - 2b = -15 \\ c = -\frac{18}{2} = -9 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 + 4 = 3 \\ -9 - 2\times 3 = -15 \\ c = -9 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ -15 = -15 \\ c = -9. \end{cases}$$
On a donc trouvé $a = 2$, $b = 3$ et $c = -9$.
4) On veut résoudre $2x^2 + 3x - 9 = 0$:
pour cela on calcule son discriminant Δ : $\Delta = 3^2 - 4\times 2\times(-9) = 9 + 72 = 81$.
Il est positif donc l'équation a deux solutions qui sont $x_1 = \dfrac{-3-9}{2\times 2}$ et $x_2 = \dfrac{-3+9}{2\times 2}$ c'est-à-dire $x_1 = -3$ et $x_2 = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$.
L'équation a pour solutions -3 et $\dfrac{3}{2}$.
On peut ainsi factoriser $ax^2 + bx + c$ en $2\big(x - (-3)\big)\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$ c'est-à-dire $2(x+3)\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$.
5) D'après les questions précédentes on a $P(x) = (x-2)(2x^2 + 3x - 9) = 2(x-2)(x+3)\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$ donc l'équation $P(x) = 0$ peut se réécrire $2(x-2)(x+3)\left(x - \dfrac{3}{2}\right) = 0$.
Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul donc :
$x - 2 = 0$ ou $x + 3 = 0$ ou $x - \dfrac{3}{2} = 0$
$x = 2$ ou $x = -3$ ou $x = \dfrac{3}{2}$.
On a donc bien trouvé $x = -3$, $x = \dfrac{3}{2}$ et $x = 2$ comme solutions de l'équation $P(x) = 0$.