Corrigé Devoir Maison 1

Exercice 1 : *Equations et inéquations*

1) On résout l'équation $3(2x-1)+4=2(x+3)-1$:
$$\begin{aligned} 6x-3+4&=2x+6-1\\ 6x-2x&=6-1+3-4\\ 4x&=4\\ x&=1 \end{aligned}$$
L'équation a pour solution $x=1$.

2) On résout l'équation $2(3x+1)-4=3(2x-5)+7$:
$$\begin{aligned} 6x+2-4&=6x-15+7\\ 6x-6x&=-15+7-2+4\\ 0&=-6 \end{aligned}$$
Ceci n'est possible pour aucun x, autrement dit l'équation n'a aucune solution.

3) On résout l'équation $\dfrac{3}{x+1}=5$:
Pour que l'équation ait un sens il faut que $x+1\neq 0$ c'est-à-dire $x\neq -1$.
$$\begin{aligned} \frac{3}{x+1}-5&=0\\ \frac{3}{x+1}-5\frac{x+1}{x+1}&=0\\ \frac{3-5(x+1)}{x+1}&=0\\ \frac{-2-5x}{x+1}&=0. \end{aligned}$$
Un quotient est nul si le numérateur est nul (avec le dénominateur non nul). Il faut donc que $\begin{cases} -2-5x=0\\ x\neq -1. \end{cases}$ On résout $-2-5x=0$: $-2=5x \iff x=-\dfrac{2}{5}$.
Et $-\dfrac{2}{5}\neq -1$ donc l'équation $\dfrac{3}{x+1}=5$ admet bien $-\dfrac{2}{5}$ comme solution .

4) On résout l'équation $\dfrac{3x-1}{5x+2}=2$:
Pour que l'équation ait un sens il faut que $5x+2\neq 0$ c'est-à-dire $5x\neq -2$ où $x\neq -\dfrac{2}{5}$.
$$\begin{aligned} \frac{3x-1}{5x+2}&=2\\ \frac{3x-1}{5x+2}-2&=0\\ \frac{3x-1}{5x+2}-2\frac{5x+2}{5x+2}&=0\\ \frac{3x-1-2(5x+2)}{5x+2}&=0\\ \frac{-7x-5}{5x+2}&=0. \end{aligned}$$
Un quotient est nul si le numérateur est nul (avec le dénominateur non nul). Il faut donc que

$$\begin{cases} -7x-5=0 \\ x \neq -\dfrac{2}{5}. \end{cases}$$ On résout $-7x-5=0$: $-5=7x \iff x=-\dfrac{5}{7}$.

Et $-\dfrac{5}{7} \neq -\dfrac{2}{5}$ donc l'équation $\dfrac{3x-1}{5x+2}=2$ admet bien $-\dfrac{5}{7}$ comme solution .

5) On résout $2x+3 \leqslant 4(x-2)-5$:

$$\begin{aligned} 2x+3 &\leqslant 4x-8-5 \\ 2x-4x &\leqslant -8-5-3 \\ -2x &\leqslant -16 \\ 2x &\geqslant 16 \\ x &\geqslant 8. \end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'inéquation $2x+3 \leqslant 4(x-2)-5$ est $[8\,;+\infty[$.

6) On résout $\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{4} > \dfrac{3}{5}x+2$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x+\frac{1}{4} &> \frac{3}{5}x+2 \\ \frac{2}{3}x-\frac{3}{5}x &> -\frac{1}{4}+2 \\ \frac{10}{15}x-\frac{9}{15}x &> -\frac{1}{4}+\frac{8}{4} \\ \frac{1}{15}x &> \frac{7}{4} \\ x &> \frac{7}{4}\times 15 \\ x &> \frac{105}{4} \end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'inéquation $\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{4} > \dfrac{3}{5}x+2$ est $\left]\dfrac{105}{4}\,;+\infty\right[$.

Exercice 2 : *Etude de fonction*

1) Non on n'aurait pas pu définir la fonction f sur $[-1\,;+\infty[$ car pour $x=-1$ on a $x+1=0$ et la fraction $\dfrac{2x^2+3x-2}{x+1}$ ne peut pas exister pour cette valeur de x.

2) On calcule les valeurs de $f(0)$, $f(1)$ et $f(3)$.
On a $f(0)=\dfrac{2\times 0+3\times 0-2}{0+1}=-2$. On a ensuite $f(1)=\dfrac{2+3-2}{1+1}=\dfrac{3}{2}$ et on a enfin $f(3)=\dfrac{2\times 3^2+3\times 3-2}{3+1}=\dfrac{18+9-2}{4}=\dfrac{25}{4}$.

3) Pour tous les a et b et pour tout x de $]-1\,;+\infty[$ on a :
$$ax+b-\frac{3}{x+1}=\frac{(ax+b)(x+1)}{x+1}-\frac{3}{x+1}=\frac{ax^2+ax+bx+b}{x+1}-\frac{3}{x+1}=\frac{ax^2+(a+b)x+b-3}{x+1}.$$
Pour que $f(x)=ax+b-\dfrac{3}{x+1}$ il faut que $ax^2+(a+b)x+b-3=2x^2+3x-2$ et alors il nous faut identifier les coefficients, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} a &= 2 \\ a+b &= 3 \\ b-3 &= -2 \end{cases}$$ Il nous faut alors résoudre ce système :

$$\begin{cases} a = 2 \\ 2+b = 3 \\ b-3 = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 3-2 \\ b-3 = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ b = -2+3 \end{cases} \iff \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ b=1 \end{cases}$$

On a ainsi trouvé que pour $a = 2$ et $b = 1$ on a bien $f(x) = ax + b - \dfrac{3}{x+1}$.

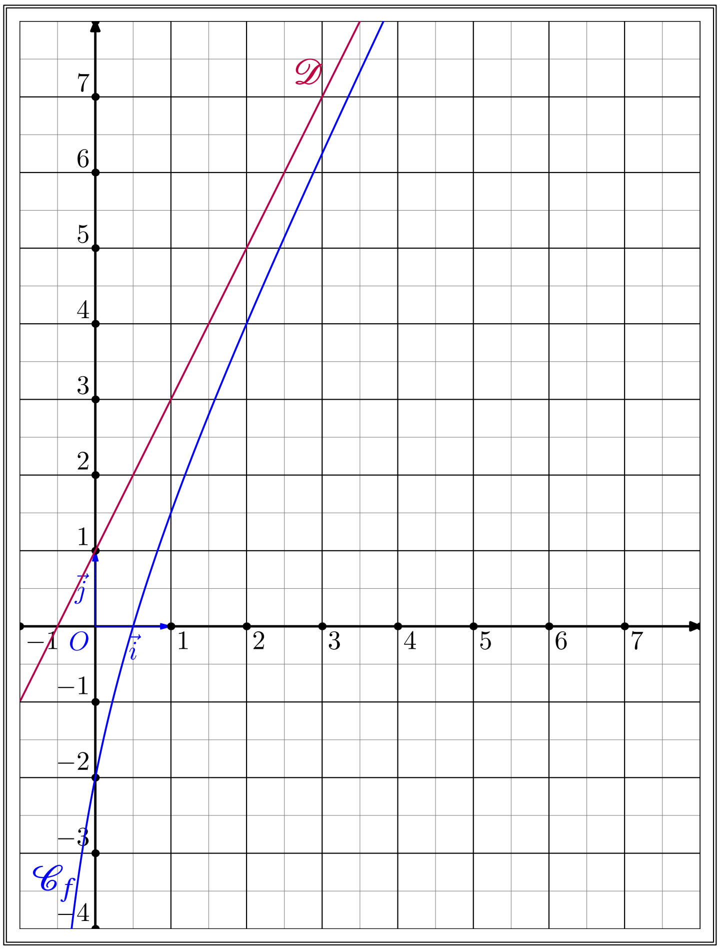
4) On note $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = 2x + 1$.

a) On trace la droite $\mathscr{D}$ dans le repère $\left(O; \vec{i}\ ; \vec{j}\right)$ ci-après.

b) On a, d'après la question 3), $f(x) - (2x+1) = 2x + 1 - \dfrac{3}{x+1} - (2x+1) = -\dfrac{3}{x+1}$.

La différence $f(x) - (2x+1)$ est du signe de $-\dfrac{3}{x+1}$ qui est toujours négatif pour x dans $]-1\,;+\infty[$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est toujours au dessous de $\mathscr{D}$.

5) On trace la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère orthonormé $\left(O; \vec{i}\ ; \vec{j}\right)$.



Exercice 3 : *Fonctions composées*

1) On calcule $g(-1)$ et $g(2)$: $g(-1) = 1+3 = 4$ et $g(2) = -2+3 = 1$.
   On calcule les images par f de 1 et 4 : $f(1) = 1-8 = -7$ et $f(4) = 4^3 - 8 = 64-8 = 56$.
2) On résout l'équation $f(x) = 0$: $x^3 - 8 = 0 \iff x^3 = 8 = 2^3$. On a donc $x = 2$ comme solution. Puisque la fonction cube est strictement croissante il n'y a qu'une seule valeur de x pour laquelle x^3 vaut 8.
   Ainsi l'équation $x^3 - 8 = 0$ n'a qu'une solution $x = 2$.
3) Déterminer le signe de g revient à résoudre $g(x) \geqslant 0$:
   $$-x+3 \geqslant 0$$
   $$3 \geqslant x$$
   $$x \leqslant 3.$$
   On peut alors mettre ce résultat dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

4) On a $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = \big(g(x)\big)^3 - 8 = (-x+3)^3 - 8$.
5) On calcule les images par $f \circ g$ de -1 et 2 .
   On a $(f \circ g)(-1) = f\big(g(-1)\big)$ et, d'après la question 1), $(f \circ g)(-1) = f(4) = 56$.
   On a $(f \circ g)(2) = f\big(g(2)\big)$ et, d'après la question 1), $(f \circ g)(2) = f(1) = -7$.

6) *a)* La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \mapsto x^3 - 8$ aussi est croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi f est croissante sur $\mathbb{R}$.
   La fonction affine g a un coefficient directeur négatif donc g est décroissante.

   b) D'après le cours la fonction f étant croissante et la fonction g étant décroissante la fonction $f \circ g$ est décroissante. On peut alors dresser le tableau de variations de $f \circ g$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$(f \circ g)(x)$	$+\infty$ ↘	$-\infty$