Corrigé Devoir Surveillé 3

Questions de cours :

Exercice 1 : *Octets*

1) Il y a deux choix possibles pour chaque chiffre et il y a huit chiffres, on a donc un total de 2^8, soit 256 octets possibles.
   Dans toute la suite de l'exercice la génération d'octets est équiprobable. On doit donc décompter les cas.
2) Il n'y a qu'une seule possibilité pour obtenir un octet qui n'est composé que de 0 par conséquent la probabilité correspondante est $P(A) = \dfrac{1}{256}$.
3) Pour obtenir un octet commençant par 0110 seuls les quatre derniers chiffres sont à sélectionner, soit 2^4 possibilités.
   On a donc une probabilité correspondante qui est $\dfrac{2^4}{256}$ c'est-à-dire que $P(B) = \dfrac{1}{16}$.
4) Pour obtenir un octet qui n'a qu'un seul 1 il suffit de choisir une place pour le 1 les autres n'étant que des 0. On a donc 8 possibilités.
   La probabilité correspondante est $\dfrac{8}{256}$ c'est-à-dire que $P(C) = \dfrac{1}{32}$.
5) Obtenir un octet dont la somme des chiffres vaut 7 revient à obtenir un octet qui n'a qu'un seul 0 et donc, de la même manière qu'à la question précédente, on a huit choix possibles.
   La probabilité correspondante est $\dfrac{8}{256}$ c'est-à-dire que $P(D) = \dfrac{1}{32}$.
6) Obtenir un octet qui a au plus un 1 c'est obtenir un octet qui n'a que des 0 ou obtenir un octet qui a exactement un 1. Par conséquent cet événement est la réunon (disjointe) des événements A et C. On a donc $P(E) = P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \dfrac{1}{256} + \dfrac{8}{256}$. La probabilité demandée vaut $\dfrac{9}{256}$.
7) Le contraire d'obtenir un octet qui a au moins un 1 est obtenir un octet qui a au plus zéro 1, autrement dit $\overline{F} = A$ et ainsi $P(F) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{1}{256} = \dfrac{255}{256}$. La probabilité de F vaut $\dfrac{255}{256}$.

Exercice 2 : ***Un petit polynôme...***

On considère le polynôme $P(x)=2x^4+7x^3+5x^2$.

1) Pour résoudre $P(x)=0$ on factorise P : $P(x)=x^2(2x^2+7x+5)$.
   On doit donc résoudre $x^2(2x^2+7x+5)=0$.
   Un produit de facteurs et nul si et seulement si l'un des facteurs est nul donc les solutions de l'équation $P(x)=0$ sont 0 (venant de $x^2=0$) et les racines de $2x^2+7x+5$.
   Pour déterminer ces dernières on calcule le discriminant de $2x^2+7x+5$:
   $\Delta=7^2-4\times2\times5=49-40=9$.
   Le discriminant est positif donc le trinôme a deux racines qui sont $x_1=\dfrac{-7-3}{2\times2}$ et $x_2=\dfrac{-7+3}{2\times2}$ c'est-à-dire $x_1=-\dfrac{5}{2}$ et $x_2=-1$.
   Ainsi l'équation $P(x)=0$ a pour solutions $x=0$, $x=-1$ et $x=-\dfrac{5}{2}$.

2) P est factorisable en $x^2(2x^2+7x+5)$. De plus on connait le signe de $2x^2+7x+5$ par rapport à ses racines qu'on a trouvé à la question précédente.
   On peut donc dresser le tableau de signe de P et y lire son signe .

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		-1		0		$+\infty$
x^2		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$+$	
$(2x^2+7x+5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	

3) On résout $P(x)=-x^2$:
   $2x^4+7x^3+5x^2=-x^2$
   $2x^4+7x^3+6x^2=0$
   $x^2(2x^2+7x+6)=0.$
   Or un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul donc soit $x=0$, soit $2x^2+7x+6=0$.
   On doit donc chercher les solutions de $2x^2+7x+6=0$.
   Pour cela on calcule le discriminant de $2x^2+7x+6$: $\Delta=7^2-4\times2\times6=49-48=1$.
   Le discriminant est positif donc le trinôme a deux racines qui sont $x_1=\dfrac{-7-1}{2\times2}$ et $x_2=\dfrac{-7+1}{2\times2}$ c'est-à-dire $x_1=-2$ et $x_2=-\dfrac{3}{2}$.
   Ainsi l'équation $P(x)=-x^2$ a pour solutions $x=0$, $x=-2$ et $x=-\dfrac{3}{2}$.