# Devoir Maison 6

A rendre pour le 01/02.

Il sera tenu compte de la propreté et de la présentation.

## Exercice 1 : *Etude de fonction*

On considère la fonction $f$ définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{-x^2-2x+5}{1-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé du plan.

1) Déterminer la limite de la fonction $f$ en chacune des bornes de son ensemble de définition.
2) *a)* Démontrer qu'il existe trois réels $a, b$ et $c$, que l'on déterminera, tels que pour tout réel $x$ différent de 1 on ait $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$. Quelle est $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{c}{x-1}$ ?

   *b)* Retrouver les 4 limites de la question 1) .
3) Dresser le tableau de variations de $f$.
   EXCEPTIONNELLEMENT on ne demande pas de justification.
4) Démontrer que $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes que l'on déterminera.
5) Soit $d$ la fonction définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ par $d(x)=f(x)-(x+3)$.
   Etudier le signe de la fonction $d$ sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ et l'interpréter graphiquement.
6) Tracer $\mathscr{C}$.

## Exercice 2 : *Equation de cercle*

On munit le plan d'un repère orthonomé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.
Soit $k$ un réel. On note $C_k$ l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que :

$$x^2+y^2+kx+(8-k)y-10=0.$$

1) Déterminer les ensembles $C_0, C_1$ et $C_2$.
2) Démontrer que quel que soit le réel $k$, l'ensemble $C_k$ est un cercle.
   On donnera les coordonnées de son centre $\Omega_k$ et de son rayon $R_k$ en fonction de $k$.
3) Calculer les coordonnées des points d'intersection $A$ et $B$ des cercles $C_0$ et $C_1$.
4) Démontrer que quel que soit le réel $k$, les cercles $C_k$ passent toujours par les points $A$ et $B$.

## Exercice 3 : *Puissance d'un point par rapport à un cercle*

Soit $C$ un cercle de centre $O$ et de rayon $R$, et $M$ un point quelconque du plan.
On considère une droite $D$ passant par $M$ et coupant le cercle $C$ en deux points notés $A$ et $B$.
Le but de cet exercice est de démontrer que la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ est indépendante de la droite $D$.
On appelle $C$ le point diamétralement opposé à $A$.

1) On considère un point $M$ situé à l'extérieur du cercle $C$.
   *a)* Démontrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$.
   *b)* En déduire que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = OM^2 - R^2$ et donc que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ ne dépend pas de la droite choisie.
2) Reprendre la question 1) avec un point $M$ situé à l'intérieur du cercle $C$.
3) *a)* Que peut-on dire des points $A$ et $B$ si le point $M$ appartient au cercle $C$ ?
   *b)* Le résultat obtenu aux questions précédentes est-il toujours valable ?
4) *a)* Que peut-on dire des points $A$ et $B$ si la droite $D$ est tangente au cercle $C$ ?
   *b)* On appelle $T$ le point de contact entre le cercle $C$ et la droite $D$.
   Démontrer que $MT^2 = OM^2 - R^2$.

Le nombre $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = OM^2 - R^2$ est appelé la puissance u point $M$ par rapport au cercle $C$.