Corrigé Devoir Maison 2

Exercice 1 : *Second degré*

1) On résout l'inéquation $2x^2-7x+5 \geqslant 0$:
pour cela on calcule le discriminant : $\Delta=(-7)^2-4\times2\times5=49-40=9$.
Il est positif donc le trinôme a deux racines qui sont $x_1=\dfrac{7-3}{2\times2}$ et $x_2=\dfrac{7+3}{2\times2}$ c'est-à-dire $x_1=1$ et $x_2=\dfrac{5}{2}$.
Puisque le coefficient a vaut 2 le trinôme est positif à l'extérieur des racines.
Autrement dit l'ensemble solution de l'inéquation est $]-\infty;1]\cup\left[\dfrac{5}{2};+\infty\right[$.

2) On résout l'inéquation $2x^2-5x-3<0$:
pour cela on calcule le discriminant : $\Delta=(-5)^2-4\times2\times(-3)=25+24=49$.
Il est positif donc le trinôme a deux racines qui sont $x_1=\dfrac{5-7}{2\times2}$ et $x_2=\dfrac{5+7}{2\times2}$ c'est-à-dire $x_1=-\dfrac{1}{2}$ et $x_2=3$.
Le trinôme est négatif à l'intérieur des racines
Autrement dit l'ensemble solution de l'inéquation est $\left]-\dfrac{1}{2};3\right[$.

3) On résout l'inéquation $3x^2-5x+4<0$:
pour cela on calcule le discriminant : $\Delta=(-5)^2-4\times3\times4=25-48=-23$.
Il est négatif donc le trinôme est toujours positif.
Autrement dit l'ensemble solution de l'inéquation est $\emptyset$.

4) On résout l'inéquation $-9x^2+12x-4\geqslant 0$:
pour cela on calcule le discriminant : $\Delta=12^2-4\times(-9)\times(-4)=144-144=0$.
Il est nul donc le trinôme a une racine $x=-\dfrac{12}{2\times(-9)}=\dfrac{2}{3}$.
Le trinôme est toujours négatif sauf en $\dfrac{2}{3}$ où il est nul.
Autrement dit l'ensemble solution de l'inéquation est $\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$.

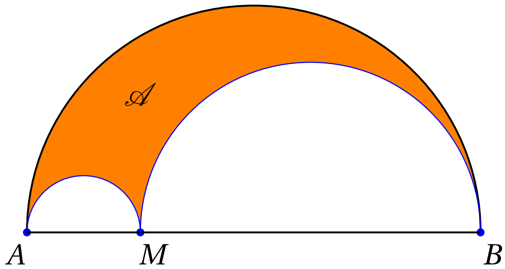
5) on résout l'inéquation $\dfrac{x^2-8x-9}{x-1}\leqslant 0$:
pour cela on calcule le discriminant du numérateur : $\Delta=(-8)^2-4\times(-9)=64+36=100$.
Il est positif donc le trinôme x^2-8x-9 a deux racines qui sont $x_1=\dfrac{8-10}{2}$ et $x_2=\dfrac{8+10}{2}$ c'est-à-dire $x_1=-1$ et $x_2=9$.
Le trinôme est négatif à l'intérieur des racines et positif à l'extérieur. On peut donc dresser un tableau de signes de la fraction :

x	$-\infty$		-1		1		9		$+\infty$
x^2-8x-9		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$\dfrac{x^2-8x-9}{x-1}$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

On lit dans ce tableau l'ensemble solution de l'inéquation : $]-\infty;-1]\cup]1;9]$.

Exercice 2 : *Aires de disques*

1) on fait une figure.



2) On appelle $\mathscr{A}$ l'aire de la portion de surface comprise entre le demi-disque de diamètre $[AB]$ et les demi-disques de diamètres $[AM]$ et $[MB]$.
Cette aire correspond à la différence entre l'aire du demi-disque de diamètre $[AB]$ et celles des demi-disques de diamètres $[AM$ et $[MB]$.
On a colorié cette aire en orange sur la figure .

Le rayon du demi-disque de diamètre $[AB]$ vaut $\frac{4}{2}$, son aire vaut donc $\frac{1}{2}\pi\times 2^2$ c'est-à-dire 2π .
Le rayon de celui de diamètre $[AM]$ vaut $\frac{x}{2}$, son aire vaut donc $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$ c'est-à-dire $\frac{\pi x^2}{8}$.
Le rayon de celui de diamètre $[MB]$ vaut $\frac{4-x}{2}$ et son aire vaut $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{4-x}{2}\right)^2$ soit $\frac{\pi(4-x)^2}{8}$.
Ainsi $\mathscr{A} = 2\pi - \frac{\pi x^2}{8} - \frac{\pi(4-x)^2}{8}$ qu'on peut réécrire $\mathscr{A} = \pi\frac{2\times 8 - x^2 - (16-8x+x^2)}{8} = \pi\frac{-2x^2+8x}{8}$.
L'aire de la portion de surface en orange vaut $\pi\frac{-x^2+4x}{4}$.

3) On cherche les valeurs de x pour lesquelles on aura $\mathscr{A} = \frac{1}{2}\times 2\pi$.
On résout donc $\pi\frac{-x^2+4x}{4} = \pi$:

$$\pi(-x^2+4x) = 4\pi$$
$$-x^2+4x = 4$$
$$-x^2+4x-4 = 0.$$

Pour résoudre cette équation on calcule son discriminant : $\Delta = 4^2 - 4\times(-1)\times(-4) = 16-16 = 0$.
Il est nul donc l'équation admet une solution $x = -\frac{4}{2\times(-1)} = 2$.
Pour que l'aire marquée soit la moitié de l'aire du demi-disque de diamètre $[AB]$ il faut que $x = 2$, autrement dit que M soit le milieu de $[AB]$.

Exercice 3 : *Racines et factorisation*

1) Si P est factorisable par $(x-\alpha)$ alors il existe un autre polynôme Q tel que pour tout x on ait $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$.
On a alors $P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha) = 0\times Q(\alpha) = 0$. Autrement dit α est bien racine de P.

2) On suppose que α est racine de P.
   On écrit $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ avec a_3, a_2, a_1 et a_0 des constantes.
   a) On a $(x-\alpha)\left(x^2+\alpha x+\alpha^2\right) = x^3+\alpha x^2+\alpha^2 x-\alpha x^2-\alpha^2 x-\alpha^3 = x^3-\alpha^3$.
   On a donc bien la formule demandée.
   b) α est racine de P signifie que $P(\alpha)=0$ autrement dit que $a_3\alpha^3+a_2\alpha^2+a_1\alpha+a_0=0$.
   c) Pour tout x on a $P(x) = P(x) - P(\alpha)$ car $P(\alpha)=0$ et
$$\begin{aligned}
P(x)-P(\alpha) &= a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0-(a_3\alpha^3+a_2\alpha^2+a_1\alpha+a_0)\\
&= a_3(x^3-\alpha^3)+a_2(x^2-\alpha^2)+a_1(x-\alpha)\\
&= a_3\Big((x-\alpha)\left(x^2+\alpha x+\alpha^2\right)\Big)+a_2\Big((x-\alpha)(x+\alpha)\Big)+a_1(x-\alpha)\\
&= (x-\alpha)\Big(a_3\left(x^2+\alpha x+\alpha^2\right)+a_2(x+\alpha)+a_1\Big)\\
&= (x-\alpha)Q(x),
\end{aligned}$$
   en posant $Q(x) = a_3\left(x^2+\alpha x+\alpha^2\right)+a_2(x+\alpha)+a_1$.
   Q est alors un polynôme et on a bien que P est factorisable par $(x-\alpha)$.
3) On a donc montré que α est racine de P si et seulement si on peut factoriser P par $(x-\alpha)$.