Corrigé Devoir Maison 1

Exercice 1 : *Equations*

1) On résout l'équation du second degré $4x^2 - 12x + 9 = 0$.
Pour cela on calcule son discriminant : $\Delta = (-12)^2 - 4\times4\times9 = 144 - 144 = 0$.
L'équation admet donc une seule solution : $x = \dfrac{12}{2\times4} = \dfrac{3}{2}$.

2) On résout l'équation du second degré $6 - x^2 + x = 0$ (ou encore $-x^2 + x + 6 = 0$).
Pour cela on calcule son discriminant : $\Delta = 1^2 - 4\times(-1)\times6 = 25 = 5^2$.
Δ est positif donc l'équation admet deux solutions qui sont :
$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{25}}{2\times(-1)} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{25}}{2\times(-1)}$$
$$x_1 = -\frac{-1-5}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = -\frac{-1+5}{2}$$
$$x_1 = 3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = -2.$$
Les solutions de l'équation sont donc -2 et 3.

3) On résout l'équation du second degré $3x^2 + 2x + 7 = 0$.
Pour cela on calcule son discriminant : $\Delta = 2^2 - 4\times3\times7 = 4 - 84 = -80$.
Δ est négatif donc l'équation n'admet pas de solutions.

4) On résout l'équation du second degré $x^2 - \sqrt{3}x - 3 = 0$.
Pour cela on calcule son discriminant : $\Delta = \left(-\sqrt{3}\right)^2 - 4\times(-3) = 3 + 12 = 15$.
Δ est positif donc l'équation admet deux solutions qui sont :
$$x_1 = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{15}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}$$
Les solutions de l'équation sont donc $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{15}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}$.

5) L'équation de l'énoncé est équivalente aux équations suivantes :
$$\frac{4}{x-2} = x+3 \iff \frac{4}{x-2} - (x+3) = 0 \iff \frac{4-(x^2+x-6)}{x-2} = 0 \iff \begin{cases} -x^2 - x + 10 = 0 \\ x \neq 2. \end{cases}$$
Remarque : A $\iff$ B se lit « A est équivalent à B», on peut le traduire par si A est vrai alors B est vrai et si B est vrai alors A est vrai.

Il nous faut donc résoudre $-x^2 - x + 10 = 0$.
On a $\Delta = (-1)^2 - 4\times(-1)\times10 = 1 + 40 = 41$ et donc deux solutions qui sont :
$x_1 = \dfrac{1-\sqrt{41}}{-2} = \dfrac{\sqrt{41}-1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{41}}{-2} = \dfrac{-\sqrt{41}-1}{2}$.
Ces deux solutions sont bien distinctes de 2, donc l'équation (de départ) admet deux solutions qui sont $\dfrac{\sqrt{41}-1}{2}$ et $\dfrac{-\sqrt{41}-1}{2}$.

6) On commence par suivre l'indication et on cherche à factoriser $x^2 - 3x + 2$.
Pour cela on cherche les racines de ce trinôme, on calcule $\Delta = (-3)^2 - 4\times2 = 9 - 8 = 1$. Il est positif donc ce trinôme a deux racines qui sont $x_1 = \dfrac{3-1}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{3+1}{2} = 1$.

On a ainsi la factorisation $x^2-3x+2=1\times(x-1)(x-2)$. On peut donc réécrire l'équation de départ
$\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}+\dfrac{2x}{x+2}=0 \iff \dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1}+\dfrac{2x}{x+2}=0 \iff \begin{cases} x-2+\dfrac{2x}{x+2}=0 \\ x\neq 1. \end{cases}$
Il nous faut donc résoudre :
$x-2+\dfrac{2x}{x+2}=0 \iff \dfrac{(x-2)(x+2)+2x}{x+2}=0 \iff \dfrac{(x^2-4)+2x}{x+2}=0 \iff \begin{cases} x^2+2x-4=0 \\ x\neq -2. \end{cases}$
L'équation de départ est donc équivalente à $\begin{cases} x^2+2x-4=0 \\ x\neq 1\ ;\ x\neq -2. \end{cases}$
On calcule le discriminant de $x^2+2x-4=0$: $\Delta=2^2-4\times(-4)=20$.
Il est positif donc l'équation $x^2+2x-4=0$ a deux racines qui sont :

$$x_1=\frac{-2-\sqrt{20}}{2} \text{ et } x_2=\frac{-2+\sqrt{20}}{2}$$
$$x_1=\frac{-2-2\sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2=\frac{-2+2\sqrt{5}}{2}$$
$$x_1=-1-\sqrt{5} \text{ et } x_2=-1+\sqrt{5}.$$

Ces deux solutions sont différentes de 1 et -2 donc se sont bien les solutions de l'équation de départ.

Exercice 2 : *Famille de droites*

1) On a pour $\mathscr{D}_{-1}$: $\big(3\times(-1)+2\big)x+\big(1-4\times(-1)\big)y+2\times(-1)-3=0 \iff -x+5y-5=0 \iff y=\dfrac{1}{5}x+\dfrac{5}{5}$.
L'équation la plus simple de $\mathscr{D}_{-1}$ est $y=\dfrac{1}{5}x+1$.
On a pour $\mathscr{D}_1$: $(3+2)x+(1-4)y+2-3=0 \iff 5x-3y-1=0 \iff 3y=5x-1$.
L'équation la plus simple de $\mathscr{D}_1$ est $y=\dfrac{5}{3}x-\dfrac{1}{3}$.
On a pour $\mathscr{D}_{\frac{1}{4}}$: $\left(3\times\dfrac{1}{4}+2\right)x+\left(1-4\times\dfrac{1}{4}\right)y+2\times\dfrac{1}{4}-3=0 \iff \dfrac{11}{4}x+0y-\dfrac{5}{2}=0 \iff x=\dfrac{5}{2}\times\dfrac{4}{11}=\dfrac{20}{22}$.
L'équation la plus simple de $\mathscr{D}_{\frac{1}{4}}$ est $x=\dfrac{10}{11}$.

2) *a)* Pour que $\mathscr{D}_m$ passe par l'origine du repère il faut que les coordonnées $(0;0)$ soient solutions de l'équation de $\mathscr{D}_m$.
On doit donc avoir $0+0+2m-3=0$ c'est-à-dire $m=\dfrac{3}{2}$.
Pour que $\mathscr{D}_m$ passe par l'origine du repère il faut que $m=\dfrac{3}{2}$.

b) Pour que $\mathscr{D}_m$ passe par le point $A(2;1)$ il faut que ses coordonnées soient solutions de l'équation de $\mathscr{D}_m$.
On doit donc avoir $(3m+2)\times2+(1-4m)\times1+2m-3=0$ c'est-à-dire $6m+4+1-4m+2m-3=0$ puis $4m+2=0$ et donc $m=-\dfrac{1}{2}$.
Pour que $\mathscr{D}_m$ passe par le point $A(2;1)$ il faut que $m=-\dfrac{1}{2}$.

c) Pour que $\mathscr{D}_m$ soit parallèle à l'axe des abscisses il faut que son coefficient directeur soit égal à zéro. Il nous faut donc une équation réduite de $\mathscr{D}_m$:
$(3m+2)x+(1-4m)y+2m-3=0 \iff (1-4m)y=-(3m+2)x-2m+3$
$\iff y=-\dfrac{3m+2}{1-4m}x+\dfrac{-2m+3}{1-4m}$ dès que $1-4m\neq 0$.

on veut donc $-\dfrac{3m+2}{1-4m}=0$ soit $3m+2=0$ puis $m=-\dfrac{2}{3}$. On a alors bien $1-4m\neq 0$.

Pour que $\mathscr{D}_m$ soit parallèle à l'axe des abscisses il faut que $m=-\dfrac{2}{3}$.

d) Pour que $\mathscr{D}_m$ soit parallèle à l'axe des ordonnées il faut que son équation réduite ne contienne pas de « y » autrement dit que $1-4m=0$ c'est-à-dire $m=\dfrac{1}{4}$.

Pour que $\mathscr{D}_m$ soit parallèle à l'axe des abscisses il faut que $m=\dfrac{1}{4}$.

e) Pour que $\mathscr{D}_m$ soit parallèle à la droite d'équation $y=2x+4$ il faut que son coefficent directeur soit égal à 2. Il faut donc que $1-4m\neq 0$ et $-\dfrac{3m+2}{1-4m}=2 \iff 2+\dfrac{3m+2}{1-4m}=0 \iff \dfrac{2(1-4m)+3m+2}{1-4m}=0 \iff 2-8m+3m+2=0$ puisqu'on a déjà $1-4m\neq 0$. Il faut ainsi $4-5m=0$ puis $m=\dfrac{4}{5}$. Pour que $\mathscr{D}_m$ soit parallèle à la droite d'équation $y=2x+4$ il faut que $m=\dfrac{4}{5}$.

3) Si un tel point existe il appartient à toutes les droites et notamment à $\mathscr{D}_{\frac{1}{4}}$ donc, puisque l'équation de $\mathscr{D}_{\frac{1}{4}}$ est $x=\dfrac{10}{11}$, il faut forcément que l'abscisse de G soit $\dfrac{10}{11}$.
De plus ce point G doit aussi appartenir à $\mathscr{D}_0$ dont l'équation est $y=-2x+3$ donc les coordonnées de G doivent être solution de $y=-2x+3$.
Si l'abscisse de G est $\dfrac{10}{11}$ son ordonnée est alors $-2\times\dfrac{10}{11}+3=\dfrac{-20+33}{11}=\dfrac{13}{11}$.
Le point G, s'il existe, a pour coordonnées $\left(\dfrac{10}{11};\dfrac{13}{11}\right)$.
On vérifie donc que les coordonnées $\left(\dfrac{10}{11};\dfrac{13}{11}\right)$ sont solutions de l'équation de $\mathscr{D}_m$ pour tout m :

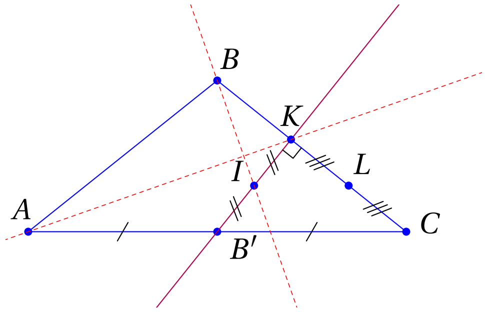
$$\begin{aligned}(3m+2)\times\frac{10}{11}+(1-4m)\times\frac{13}{11}+2m-3 &= \frac{30m+20+13-52m}{11}+\frac{22m-33}{11}\\ &= \frac{-22m+33}{11}+\frac{22m-33}{11}\\ &= 0\end{aligned}$$

(et ce pour toutes les valeurs de m)

Ainsi il existe bien un point G, de coordonnées $\left(\dfrac{10}{11};\dfrac{13}{11}\right)$, qui appartienne à $\mathscr{D}_m$ pour tout m.
Ce point est unique car le couple de coordonnées possible est unique.

Exercice 3 : ***Géométrie***

1) On fait une figure.



2) Dans le triangle $B'CK$, I et L étant les milieux de $[B'K]$ et $[KC]$ on a d'après le théorème de la droite des milieux que (IL) est parallèle à $(B'C)$.
   Par ailleurs, le triangle ABC étant isocèle en B et B' étant le milieu de $[AC]$ la droite (BB') est perpendiculaire à $(B'C)$ et donc (IL) est perpendiculaire à (BB'). Autrement dit (IL) est une hauteur de $BB'L$.
   Par construction de I et K la droite (IK) est une hauteur du triangle $BB'L$.
   Le point d'intersection I de (IK) et (IL) est donc l'orthocentre de $BB'L$.

3) La droite (BI) est la troisième hauteur du triangle $BB'L$ donc (BI) est perpendiculaire à $(B'L)$.
   Dans le triangle ACK, B' et L étant les milieux de $[AC]$ et $[KC]$ on a d'après le théorème de la droite des milieux que $(B'L)$ est parallèle à (AK).
   On a ainsi que les droites (BI) et (AK) sont perpendiculaires.