Chap V :

Limites et asymptotes

I. Limites en l'infini

1) Limite infinie à l'infini

Définition 1 : Soit f une fonction définie *au moins* sur un intervalle du type $[a;+\infty[$:
On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès que x est assez grand (Lorsqu'on dit grand, on sous-entend positif).
faire le lien avec tableau de variations

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty;\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty;\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty;\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$

On définit de même $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ par $f(x)$ est aussi grand dans les négatifs que l'on veut dès que x est assez grand.

On définit encore de manière analogue $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ (attention toutefois à l'ensemble de définition).

Exemple : $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty;\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty;\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

2) Limite finie à l'infini

Définition 2 : Soit f une fonction définie *au moins* sur un intervalle du type $[a;+\infty[$:
On dit que f a pour limite 0 en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ si $f(x)$ est aussi petit que l'on veut dès que x est assez grand (Lorsqu'on dit petit, on sous-entend proche de zéro).
On définira de même : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}=0;\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}=0;\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^3}=0;\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$

Exemple : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}=0;\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2}=0;\qquad \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^3}=0$

On peut à présent définir une limite quelconque en l'infini :

Définition 3 : Soit f une fonction définie *au moins* sur un intervalle du type $[a;+\infty[$:
Avoir $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ est équivalent à avoir $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-l]=0$

Remarque : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l \;\Leftrightarrow\; f(x)=l+\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\varepsilon(x)=0$.
$\longrightarrow$ *démonstration*

Remarque : Une fonction n'a pas nécessairement de limite (finie ou infinie) lorsque x tend vers $+\infty$:
f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos(x)$ n'a de limite ni en $-\infty$ ni en $+\infty$.

II. Limite en un point a

1) Limite en 0

Définition 4 : Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle ouvert en 0 :
Si $f(x)$ est aussi grand (positif) que l'on veut dès que x est assez proche de 0, on dit que f a pour limite $+\infty$ en 0 et on note $\lim\limits_{x\to0} f(x)=+\infty$.
(On définit de même $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\infty$.)

Exemple : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$.

Remarque : Une fonction peut avoir une limite différente à gauche et à droite de 0, on notera alors :
$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{1}{x}=-\infty$ ou encore $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x^3}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{1}{x^3}=-\infty$
On note également parfois : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x^3}=+\infty$.

Définition 5 : Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle ouvert en 0 :
Si $f(x)$ est aussi petit que l'on veut (proche de 0) dès que x est assez proche de 0, on dit que f a pour limite 0 en 0 et on note $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$.

Exemple : $\lim\limits_{x\to0} x=0$; $\qquad \lim\limits_{x\to0} x^2=0$; $\qquad \lim\limits_{x\to0} x^3=0$; $\qquad \lim\limits_{x\to0}\sqrt{x}=0$

Définition 6 : Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle ouvert en 0 :
On dit que f a pour limite l en 0 lorsque la fonction $x\mapsto f(x)-l$ a pour limite 0 en 0.

Remarque : On peut traduire mathématiquement cette définition par

$$\lim_{x\to0} f(x)=l \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to0}\big(f(x)-l\big)=0$$

2) Limites en $a \in \mathbb{R}$

Définition 7 : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert en a, on dit que f a une limite en a si la fonction $h \mapsto f(a+h)$ a une limite en 0 et alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h)$$

Exemple : On a $\lim\limits_{x \to 1} \left(1 + \dfrac{1}{(x-1)^2}\right) = \lim\limits_{h \to 0} \left(1 + \dfrac{1}{h^2}\right) = +\infty$.

Remarque : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = l + \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Remarque : Si $a \in \mathbb{D}_f$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Exemple : Si $a > 0$, $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.
Si P est un polynôme, $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$.
Si R est une fraction rationnelle *définie en* a, $\lim\limits_{x \to a} R(x) = R(a)$.

III. Opérations sur les limites

Dans toute cettte partie les limites des fonctions f et g sont « aux mêmes points » à savoir $+\infty$, $-\infty$ ou $a \in \mathbb{R}$.

1) Somme

On a le tableau récapitulatif suivant :

$\lim f(x) =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g(x) =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim \big(f(x) + g(x)\big) =$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$F.I$

2) Produit

On a le tableau récapitulatif suivant :

$\lim f(x) =$	l	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim g(x) =$	l'	$+\infty$		$-\infty$		$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim \big(f(x) \times g(x)\big) =$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$F.I$

3) Quotient

On a le tableau récapitulatif suivant :

$\lim f(x) =$	$+\infty$		$-\infty$		$\pm\infty$	$l<0$ ou $-\infty$		$l>0$ ou $+\infty$		0
$\lim g(x) =$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-	0
$\lim\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) =$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$F.I$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$F.I$

Remarque :
- 0^+ (resp. 0^+) indique que la limite est nulle et que la fonction reste positive (resp. négative).
- Il y a quatre formes indéterminées : $+\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\dfrac{\infty}{\infty}$; $\dfrac{0}{0}$

Remarque : Avec ces régles de calcul et quelques transformations on peut trouver n'importe quelle limite.

Exemple : On cherche $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-3x^2+4x+1\right)$.
Si on voit ce polynôme comme une somme de monômes on obtient une F.I. du type $+\infty-\infty$ mais on peut toujours écrire $x^3-3x^2+4x+1 = x^3\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right) = 1-0+0+0 = 1$ par somme des limites. On a donc, par produit des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-3x^2+4x+1\right) = +\infty$ vu comme « $1\times+\infty$ ».

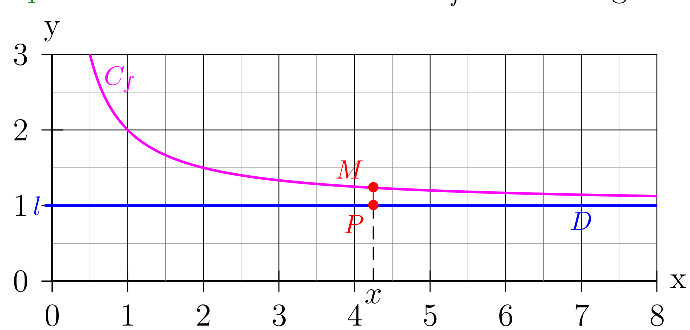
$\longrightarrow$ A faire en TD : cas des polynômes et des fractions rationnelles.

IV. Interprétation graphique et asymptotes

1) Asymptote horizontale

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$,
pour M et P les points d'abscisses x, lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, la distance PM tend vers 0 :
On dit alors que la droite D d'équation $y = l$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

Interprétation graphique pour $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$

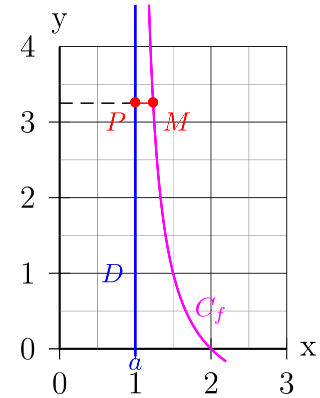


Remarque : On peut définir de même l'asymptote d'équation $y = l$ en $-\infty$ si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$

2) Asymptote verticale

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$,
on dit que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.
P et M sont ici les deux points de même ordonnée et la distance PM tend vers zéro lorsque cette ordonnée de P et M tend vers $+\infty$.

Interprétation graphique pour $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

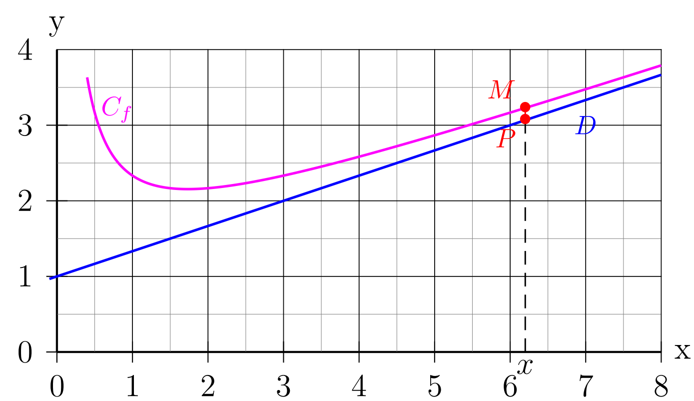


3) Asymptote oblique

Définition 8 : Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[\alpha; +\infty[$, s'il existe deux réels a et b tels que $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ on dira que la droite D d'équation $y = ax+b$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

Remarque :
- La méthode de détermination est H.P.
- On a nécessairement $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Interprétation graphique, avec P et M les deux points d'abscisses x, pour $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$



On peut de même définir une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ si $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$.