Chap III :

Opérations sur les fonctions

I. Généralités

1) Courbe d'une fonction

Définition 1 : Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$. On appelle courbe représentative de f, dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan, l'ensemble des points M de coordonnées $\left(x;f(x)\right)$, pour x dans $\mathscr{D}$.

2) Restriction d'une fonction

Définition 2 : Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}_f$ et soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ inclu dans $\mathscr{D}_f$. La restriction de f à I est la fonction g définie sur I par $f(x)=g(x)$.

II. Comparaison de deux fonctions

1) Egalité de deux fonctions

Définition 3 : Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$.

$$f=g \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\mathscr{D}_f=\mathscr{D}_g\\ \forall x\in\mathscr{D}_f, f(x)=g(x)\end{array}\right.$$

2) Notation : $f\leqslant g$

Définition 4 : Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$.
Soit I un intervalle inclu dans $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$.

$$f\leqslant g \text{ sur } I \Leftrightarrow \forall x\in I, f(x)\leqslant g(x)$$

Remarque : On définit de manière analogue $f<g$ sur I, $f>g$ sur I et $f\geqslant g$ sur I.

Représentation graphique :
Soit $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes respectives de deux fonctions f et g.

$$f\leqslant g \text{ sur } I \Leftrightarrow \mathscr{C}_f \text{ est en dessous de } \mathscr{C}_g \text{ sur } I$$

Les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ sont les abscisses des points d'intersections des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Définition 5 : On dit que f est positive sur $\mathscr{D}_f$ et on note $f\geqslant 0$ si pour tout x de $\mathscr{D}_f$, $f(x)\geqslant 0$.

Interprétation graphique :
La courbe représentative de la restriction de f à I est située au dessus de l'axe des abscisses.

Remarque : On définit de manière analogue $f<0$ sur I, $f>0$ sur I et $f\geqslant 0$ sur I.

Définition 6 : On dit qu'une fonction f est bornée sur un intervalle I inclu dans $\mathscr{D}_f$ s'il existe deux nombres m et M tels que $\forall x\in I, \quad m\leqslant f(x)\leqslant M$.

Remarque :
- Si $\forall x\in I, f(x)\geqslant M$, on dit que f est majorée sur I.
- Si $\forall x\in I, m\leqslant f(x)$, on dit que f est minorée sur I .
- Si f est à la fois majorée et minorée sur I, elle est bornée sur I.

III. Opérations sur les fonctions

1) Somme

Définition 7 : Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$.
La fonction $f+g$ est la fonction définie sur $\mathscr{D}_f\cap\mathscr{D}_g$ par
$\forall x\in\mathscr{D}_f\cap\mathscr{D}_g,\ (f+g)(x)=f(x)+g(x)$.

2) Multiplication par un réel

Définition 8 : Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.
La fonction λf est la fonction définie sur $\mathscr{D}_f$ par
$\forall x\in\mathscr{D}_f, (\lambda f)(x)=\lambda\cdot f(x)$.

3) Produit

Définition 9 : Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$.
La fonction $f\times g$ est la fonction définie sur $\mathscr{D}_f\cap\mathscr{D}_g$ par
$\forall x\in\mathscr{D}_f\cap\mathscr{D}_g,\ (f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$.

4) Quotient

Définition 10 : Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$.
La fonction $\dfrac{f}{g}$ est la fonction définie sur $\mathscr{D}_f\cap\mathscr{D}_g-\left\{x\in\mathbb{R}, g(x)=0\right\}$ par
$\dfrac{f}{g}(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Remarque : On définit la fonction inverse $\dfrac{1}{f}$ de manière analogue.

5) Composition

Définition 11 : Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathscr{D}_f$ et $\mathscr{D}_g$ et telles que pour tout x de $\mathscr{D}_f$: $g(x) \in \mathscr{D}_f$.
La fonction $f \circ g$ est la fonction définie sur $\mathscr{D}_f$ par $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
Elle se lit f « rond » g.

Remarque : Il faut faire bien attention aux ensembles de définition de f, g et $f \circ g$.
En général, $f \circ g \neq g \circ f$.

IV. Sens de variation d'une fonction

1) Définition

Définition 12 : Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$ et $I \subset \mathscr{D}_f$.
Si, pour tout réels x_1 et x_2 de I tels que $x_1 < x_2$,
- $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, alors f est croissante sur I.
- $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, alors f est décroissante sur I.

Définition 13 : Une fonction définie sur I est monotone sur I si elle est croissante sur I ou si elle est décroissante sur I.

Minimum - Maximum :

- $f(a)$ est le maximum de f sur I lorsque pour tout x de I, $f(x) \leqslant f(a)$
- M est un majorant de f sur I lorsque pour tout x de I, $f(x) \leqslant M$.
- $f(b)$ est le minimum de f sur I lorsque pour tout x de I, $f(x) \geqslant f(b)$
- m est un minorant de f sur I lorsque pour tout x de I, $f(x) \geqslant m$.

2) Monotonie et Opérations

Théorème 1 : Soit f monotone sur I et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors la fonction λf est monotone sur I.
Plus précisément :
- Si $\lambda > 0$, f et λf sont de même monotonie.
- Si $\lambda < 0$, f et λf sont de monotonie différente.

$\longrightarrow$ *démonstration*

Théorème 2 : Soient f et g deux fonctions qui sont de même monotonie sur I. Alors la fonction $f + g$ est monotone sur I.
Plus précisément :
- Si f et g sont croissantes, $f + g$ est croissante.
- Si f et g sont décroissantes, $f + g$ est décroissante.

$\longrightarrow$ *démonstration*

Théorème 3 : Soient g et f deux fonctions qui gardent la même monotonie sur respectivement I et J (avec pour tout x de I $g(x) \in J$). Alors la fonction $f \circ g$ est monotone sur I.
Plus précisément :

- Si f et g sont de même monotonie, $f \circ g$ est croissante.
- Si f et g sont de monotonie différentes, $f \circ g$ est décroissante.

$\longrightarrow$ *démonstration*

Remarque : Ceci ne marche que pour la composition $f \circ g$ et non pour le *produit* $f.g$.