Chap 5 :

Probabilités sur les ensembles finis

I. Vocabulaire et propriétés

1) Définitions

Afin d'illuster les différentes définitions on prend un exemple simple d'expérience aléatoire : le résultat d'un lancer de dé à six faces.

Définition 1 : Dans une **expérience aléatoire**, on appelle univers l'ensemble de tous les résultats possibles.
On note souvent cet ensemble Ω.

Exemple : Dans notre exemple c'est $\{1;2;3;4;5;6\}$.

Définition 2 : On appelle événement toute *partie* de l'univers. Si cette partie n'a qu'un élément on parle d'événement élémentaire.

Exemple : Dans notre exemple on a *l'événement* $\{1;2;6\}$ composé des trois *événements élémentaires* $\{1\}, \{2\}$ et $\{6\}$.

Définition 3 : On appelle événement contraire de A le complémentaire de A dans Ω c'est-à-dire $\Omega \backslash A$.
On le note $\overline{A}$.

Exemple : Dans notre exemple on a $\overline{\{1;2;6\}} = \{3;4;5\}$.
attention à la définition et au nom des événements.
La probabilité d'un événement A représente les « chances » qu'a l'événement A de se réaliser effectivement. On le note $P(A)$.
Remarque : On a **toujours** $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.
Remarque : Il faut distinguer *probabilités* de *fréquences d'apparition*.

Définition 4 : La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires de A.

Exemple : Dans notre exemple on a $P\big(\{1;2;6\}\big) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.
Remarque : On a **toujours** $P(\varnothing) = 0$ et $P(\Omega) = 1$.
Remarque : Il n'y a pas toujours *équiprobabilité*.

Maintenant que nous avons le vocabulaire nécéssaire nous pouvons voir les différenres propriétés sur le calcul des probabilités.

2) Propriétés du calcul des probabiltés

Définition 5 : On dit que deux événements A et B sont disjoints si $A \cap B = \varnothing$.

On a la propriété « naturelle » suivante :

Propriété 1 : Si deux événements A et B sont disjoints alors $P\big(A \cup B\big) = P(A) + P(B)$.

En corollaire de cette propriété on a la propriété très utile suivante :

Propriété 2 : On a $P\big(\overline{A}\big) = 1 - P(A)$.

Enfin dans le cas général d'une union de deux événements on a :

Propriété 3 : $P\big(A \cup B\big) = P(A) + P(B) - P\big(A \cap B\big)$.

Et pour l'intersection $A \cap B$ de deux événements ?

il n'y a pas de formule pour ca sauf dans un cas particulier : *l'indépendance* des événements.

II. Indépendance

1) Probabilité conditionelle

Définition 6 : On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A le nombre

$$P_A(B) = \frac{P\big(A \cap B\big)}{P(A)}.$$

Il représente la probabilité de B en supposant que A soit *effectivement* réalisé.

Remarque : On le voit aussi parfois écrit $P(B|A)$.

Propriété 4 : On peut réécrire la définition : $P\big(A \cap B\big) = P_A(B) \times P(A)$.

Remarque : Cette définition correspond bien à l'idée intuitive que l'on a de « B sachant A ». Prenons un exemple pour illustrer notre propos.

Exemple : On considère le résultat du tirage de deux boules successives dans une urne opaque qui en contient 3 rouges et 2 vertes.
On a alors $P(R_1) = \frac{3}{5}$, $P\big(R_1 \cap R_2\big) = \frac{3 \times 2}{5 \times 4} = \frac{3}{10}$ et on a bien $P_{R_1}\big(R_2\big) = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}$.

2) indépendance

Définition 7 : On dit que deux événements A et B sont indépendants si $P_A(B) = P(B)$.

Remarque : on peut réécrire cette définition : $P\big(A \cap B\big) = P(A) \times P(B)$.

Il y a deux façons d'avoir des événements indépendants :
• soit le "bon sens" vous suggère que les événements le sont,
• soit l'énoncé vous le dit d'une manière ou d'une autre.

Les cas d'indépendance sont dans la pratique très courants. Dès qu'on répéte plusieurs fois une même expérience aléatoire par exemple les résultats de ces expériences sont indépendants les uns des autres.

Exemple : Reprenons notre exemple du tirage mais en supposant qu'une fois la première boule tirée on la remette dans l'urne avant de tirer la seconde.
On a alors $P\big(R_1 \cap R_2\big) = \dfrac{3 \times 3}{5 \times 5} = \dfrac{9}{25}$, $P(R_1) = \dfrac{3}{5}$ et on a bien $P_{R_1}\big(R_2\big) = \dfrac{\frac{9}{25}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{3}{5}$.

III. Dénombrement

1) Outils

Nous avons besoin pour le cours sur les lois de probabilités d'introduire deux outils sur le dénombrement.

Définition 8 : Prenons n un entier naturel, on note $n!$ le produit $n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$.
$n!$ se lit « factorielle n ».

Exemple : $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.
Remarque : On a $5! = 5 \times 4!$.

Définition 9 : Prenons n un entier naturel et k un entier naturel plus petit que n. On appelle nombre de combinaisons de k éléments parmi n le nombre

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Remarque : Comme son nom l'indique C_n^k compte effectivement le nombre de façons de choisir une partie à k éléments pris parmi n. Il est donc un **nombre entier**.

Exemple : $C_3^2 = \dfrac{3!}{2! \times 1!} = \dfrac{6}{2} = 3$.
Remarque : Les calculatrices peuvent faire les calculs automatiquement.
Sur la graph 25 avec la touche OPTN puis PROB.

2) Binôme de Newton

A l'aide du nombre de combinaisons on peut donner une formule très importante en mathématiques, la formule du *binôme de Newton*.
Prenons deux nombres réels a et b et un entier naturel n on a alors la formule :

Théorème 1 : $(a+b)^n = b^n + C_n^1 ab^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \cdots + C_n^{n-1} a^{n-1} b + a^n$ ou encore

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Remarque : nous connaissons déjà la propriété dans des cas particuliers : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.