Chap 3 :

Suites numériques

I. Définitions

Définition 1 : On appelle *suite* toute «fonction» de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$,
c'est-à-dire toute fonction du type $u : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{cases}$.

Remarque : De même qu'on appelle souvent une fonction f, on appelle souvent une suite u.

Exemple : Par exemple pour la suite $u : n \longmapsto 3n-2$ on a $u(0) = -2, u(1) = 1, u(2) = 4 \ldots$.

Vocabulaire et Notations :
Dans la pratique on note u_n le terme $u(n)$, on l'appelle le *terme d'indice* n.
On appelle u_0 le *premier terme*, u_1 le *deuxième terme*. Le terme u_n s'appelle aussi le $n+1$*-ième terme*.
On note parfois la suite u sous la forme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus simplement (u_n).

Il existe deux façons de définir une suite :

• définition par récurrence,
c'est le cas d'une suite qui dit par exemple «$u_0 = 0$ et entre deux termes consécutifs on ajoute 2», on aura alors $u_1 = 0+2 = 2$ puis $u_2 = u_1 + 2 = 2+2 = 4$, $u_3 = u_2 + 2 = 4+2 = 6, \ldots$

• définition explicite,
c'est le cas d'une suite où on a une expression de u_n en fonction de n (comme on avait $f(x)$ en fonction de x), par exemple pour la suite définie par $u_n = 2n-1$ on aura $u_0 = 2\times 0 - 1 = -1$, $u_1 = 2\times 1 - 1 = 1$, $u_{25} = 2\times 25 - 1 = 49, \ldots$.

II. Suites Arithmétiques

1) Définitions

Définition 2 : On appelle *suite arithmétique* une suite pour laquelle on passe d'un terme au suivant en ajoutant à chaque fois un même nombre r.
La traduction mathématique de cette définition est $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout entier n.
On appelle ce nombre r la *raison* de la suite.

$$\begin{tikzcd}
u_0 \arrow[r, bend left, "+r"] \arrow[rrrrr, bend right, "+5r"'] & u_1 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_2 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_3 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_4 \arrow[r, bend left, "+r"] & u_5
\end{tikzcd}$$

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2$ est arithmétique de raison 2.

Proposition 1 : Une suite (u_n) est arithmétique si et seulement si on a pour tout entier n :
$u_{n+1} - u_n$ qui est constant (qui ne dépend plus de n).

Proposition 2 : Une suite (u_n) est arithmétique de raison r si et seulement si on a pour tout entier n :

$$u_n = n \times r + u_0.$$

Exemple : On le vérifie avec l'exemple précédent, c'est la suite définie par $u_n = 2n + 1$ pour tout n.

A quoi ça sert ? : la définition d'une suite arithmétique se fait terme après terme car c'est souvent comme cela qu'elle apparaît dans les problèmes, alors que l'expression $u_n = n \times r + u_0$ est plus pratique pour les calculs, elle permet notamment de déterminer u_{1000} sans avoir calculé u_0, u_1, … u_{999} avant.

2) Somme des $n+1$ premiers termes

Théorème 1 : On a pour tout n : $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

De manière plus générale on sait calculer la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

Proposition 3 : On a pour tout n : $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = (n+1)\left(\dfrac{u_0 + u_n}{2}\right)$.

Remarque : On peut réécrire cette formule « en français » :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (\text{nb de termes}) \times \frac{1^{\text{er}}\text{terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

Exemple : Pour la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -1$ et de raison 2 on a :
$u_0 + u_1 + \cdots + u_{50} = 51 \times \dfrac{-1 + (2 \times 50 - 1)}{2} = 51 \times 49 = 2499$.
Le calcul « à la main » serait, lui, beaucoup plus long.

III. Suites Géométriques

1) Définitions

Définition 3 : On appelle *suite géométrique* une suite pour laquelle on passe d'un terme au suivant en multipliant à chaque fois par un même nombre q.
La traduction mathématique de cette définition est $u_{n+1} = q \times u_n$ pour tout entier n.
On appelle ce nombre q la *raison* de la suite.

$$\begin{tikzcd}
u_0 \arrow[r, bend left, "\times q"] \arrow[rrrrr, bend right, "\times q^5"'] & u_1 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_2 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_3 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_4 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_5
\end{tikzcd}$$

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n$ est géométrique de raison 3.

Proposition 4 : Une suite (u_n), qui ne s'annule pas, est géométrique si et seulement si on a pour tout entier n :
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ qui est constant (qui ne dépend plus de n).

Proposition 5 : Une suite (u_n) est géométrique de raison q si et seulement si on a pour tout entier n :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Exemple : On le vérifie avec l'exemple précédent, c'est la suite définie par $u_n = 2 \times 3^n$ pour tout n.

A quoi ça sert ? : l'intérêt de cette propriété par rapport à la définition est le même que dans la situation des suites arithmétiques, à savoir pouvoir calculer des termes genre u_{1000} sans avoir calculé les précédents.

2) Somme des $n+1$ premiers termes

Théorème 2 : On a pour tout n : $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$, si $q \neq 1$.
Et si $q = 1$ on a : $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n+1$.

De manière plus générale on sait calculer la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.

Proposition 6 : On a pour tout n : $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$, si $q \neq 1$.
Et si $q = 1$ on a : $u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 \times (n+1)$.

Remarque : On peut réécrire cette formule « en français »:

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (1^{\text{er}}\text{terme}) \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nb de termes}}}{1 - \text{raison}}.$$

Exemple : Pour la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2 on a :
$u_0 + u_1 + \cdots + u_{50} = 3 \times \dfrac{1-2^{51}}{1-2} = 3(2^{51} - 1)$.
Là encore le calcul « à la main » serait beaucoup plus long (et en l'occurence vraiment pénible).