

## Chap 3 :

# Suites numériques

## I. Définitions

**Définition 1 :** On appelle *suite* toute « fonction » de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$ ,  
c'est-à-dire toute fonction du type  $u : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{cases}$ .

**Remarque :** De même qu'on appelle souvent une fonction  $f$ , on appelle souvent une suite  $u$ .

**Exemple :** Par exemple pour la suite  $u : n \longmapsto 3n - 2$  on a  $u(0) = -2, u(1) = 1, u(2) = 4, \dots$

### Vocabulaire et Notations :

Dans la pratique on note  $u_n$  le terme  $u(n)$ , on l'appelle le *terme d'indice  $n$* .

On appelle  $u_0$  le *premier terme*,  $u_1$  le *deuxième terme*. Le terme  $u_n$  s'appelle aussi le  *$n + 1$ -ième terme*.

On note parfois la suite  $u$  sous la forme  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou plus simplement  $(u_n)$ .

Il existe deux façons de définir une suite :

- définition par récurrence,

c'est le cas d'une suite qui dit par exemple «  $u_0 = 0$  et entre deux termes consécutifs on ajoute 2 », on aura alors  $u_1 = 0 + 2 = 2$  puis  $u_2 = u_1 + 2 = 2 + 2 = 4$ ,  $u_3 = u_2 + 2 = 4 + 2 = 6, \dots$

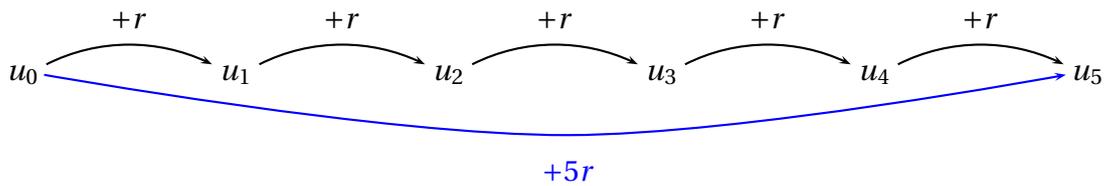
- définition explicite,

c'est le cas d'une suite où on a une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  (comme on avait  $f(x)$  en fonction de  $x$ ), par exemple pour la suite définie par  $u_n = 2n - 1$  on aura  $u_0 = 2 \times 0 - 1 = -1$ ,  $u_1 = 2 \times 1 - 1 = 1$ ,  $u_{25} = 2 \times 25 - 1 = 49, \dots$

## II. Suites Arithmétiques

### 1) Définitions

**Définition 2 :** On appelle *suite arithmétique* une suite pour laquelle on passe d'un terme au suivant en ajoutant à chaque fois un même nombre  $r$ .  
La traduction mathématique de cette définition est  $u_{n+1} = u_n + r$  pour tout entier  $n$ .  
On appelle ce nombre  $r$  la *raison* de la suite.



**Exemple :** La suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = u_n + 2$  est arithmétique de raison 2.

**Proposition 1 :** Une suite  $(u_n)$  est arithmétique si et seulement si on a pour tout entier  $n$  :  
 $u_{n+1} - u_n$  qui est constant (qui ne dépend plus de  $n$ ).

**Proposition 2 :** Une suite  $(u_n)$  est arithmétique de raison  $r$  si et seulement si on a pour tout entier  $n$  :

$$u_n = n \times r + u_0.$$

**Exemple :** On le vérifie avec l'exemple précédent, c'est la suite définie par  $u_n = 2n + 1$  pour tout  $n$ .

**A quoi ça sert ? :** la définition d'une suite arithmétique se fait terme après terme car c'est souvent comme cela qu'elle apparaît dans les problèmes, alors que l'expression  $u_n = n \times r + u_0$  est plus pratique pour les calculs, elle permet notamment de déterminer  $u_{1000}$  sans avoir calculé  $u_0, u_1, \dots, u_{999}$  avant.

### 2) Somme des $n + 1$ premiers termes

**Théorème 1 :** On a pour tout  $n$  :  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

De manière plus générale on sait calculer la somme des  $n + 1$  premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme  $u_0$  et de raison  $r$ .

**Proposition 3 :** On a pour tout  $n$  :  $u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = (n+1) \left( \frac{u_0 + u_n}{2} \right)$ .

**Remarque :** On peut réécrire cette formule « en français » :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = (\text{nb de termes}) \times \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

**Exemple :** Pour la suite arithmétique de premier terme  $u_0 = -1$  et de raison 2 on a :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{50} = 51 \times \frac{-1 + (2 \times 50 - 1)}{2} = 51 \times 49 = 2499.$$

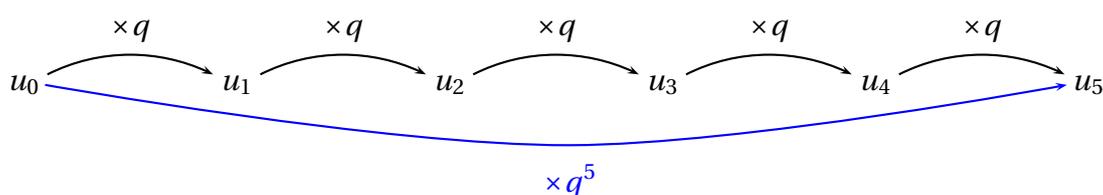
Le calcul « à la main » serait, lui, beaucoup plus long.

### III. Suites Géométriques

#### 1) Définitions

**Définition 3 :** On appelle *suite géométrique* une suite pour laquelle on passe d'un terme au suivant en multipliant à chaque fois par un même nombre  $q$ .

La traduction mathématique de cette définition est  $u_{n+1} = q \times u_n$  pour tout entier  $n$ .  
On appelle ce nombre  $q$  la *raison* de la suite.



**Exemple :** La suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = 3u_n$  est géométrique de raison 3.

**Proposition 4 :** Une suite  $(u_n)$ , qui ne s'annule pas, est géométrique si et seulement si on a pour tout entier  $n$  :  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  qui est constant (qui ne dépend plus de  $n$ ).

**Proposition 5 :** Une suite  $(u_n)$  est géométrique de raison  $q$  si et seulement si on a pour tout entier  $n$  :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

**Exemple :** On le vérifie avec l'exemple précédent, c'est la suite définie par  $u_n = 2 \times 3^n$  pour tout  $n$ .

**A quoi ça sert ? :** l'intérêt de cette propriété par rapport à la définition est le même que dans la situation des suites arithmétiques, à savoir pouvoir calculer des termes genre  $u_{1000}$  sans avoir calculé les précédents.

## 2) Somme des $n + 1$ premiers termes

**Théorème 2 :** On a pour tout  $n$  :  $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ , si  $q \neq 1$ .

Et si  $q = 1$  on a :  $1 + q + q^2 + \dots + q^n = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n + 1$ .

De manière plus générale on sait calculer la somme des  $n + 1$  premiers termes d'une suite géométrique de premier terme  $u_0$  et de raison  $q$ .

**Proposition 6 :** On a pour tout  $n$  :  $u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ , si  $q \neq 1$ .

Et si  $q = 1$  on a :  $u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n = u_0 \times (n + 1)$ .

**Remarque :** On peut réécrire cette formule « en français » :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = (\text{1<sup>er</sup> terme}) \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nb de termes}}}{1 - \text{raison}}.$$

**Exemple :** Pour la suite géométrique de premier terme  $u_0 = 3$  et de raison 2 on a :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{50} = 3 \times \frac{1 - 2^{51}}{1 - 2} = 3(2^{51} - 1).$$

Là encore le calcul « à la main » serait beaucoup plus long (et en l'occurrence vraiment pénible).