Corrigé devoir Maison 2

Exercice 1 : *Lois de probabilités*

Partie A

1) On appelle :
R l'événement « le roulement provient de Reims » ;
N l'événement « le roulement provient de Nancy » et
U l'événement « le roulement est utilisable ».
   a) On cherche $P_R(U)$ et d'après l'énoncé $P_R(U) = 0,955$.
   b) On cherche $P_N(U)$ et d'après l'énoncé $P_N(U) = 0,98$.
   c) On cherche $P(U)$. On a $P(U) = P(R).P_R(U) + P(N).P_N(U)$ et on sait que $P(N) = 0,6$ et $P(R) = 0,4$ donc $P(U) = 0.4 \times 0,955 + 0,6 \times 0,98 = 0,97$ ce qui est bien la valeur demandée.
2) *a)* Puisqu'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise chaque roulement est tiré indépendant des autres et donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10; 0,97)$.
   b) On cherche $P(X \geqslant 9)$ et on a $P(X \geqslant 9) = P(X = 9) + P(X = 10)$.
   Et $P(X \geqslant 9) = C_{10}^{10}.0,97^{10}.0,03^0 + C_{10}^{9}.0,97^9.0,03^1 \approx 0,97$.
3) *a)* Lorsqu'on approche une loi binomiale par une loi de Poisson le paramètre pour la loi de Poisson est le produit des paramètres de la loi binomiale par conséquent on approche la loi de Y par la loi $\mathcal{P}(3)$.
   b) On cherche $P(Y < 2) = P(Y = 1) + P(Y = 0)$. On lit sur le formulaire ces deux valeurs on a alors $P(Y < 2) \approx 0,149 + 0,050 \approx 0,20$.

Partie B

1) Puisque D suit la loi $\mathcal{N}(23,65; 0,02)$ la variable aléatoire $E = \dfrac{D - 23,65}{0,02}$ suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.
On cherche $P(23,61 \leqslant D \leqslant 23,70)$ et on a $P(23,61 \leqslant D \leqslant 23,70) = P\left(\frac{23,61-23,65}{0,02} \leqslant E \leqslant \frac{23,70-23,65}{0,02}\right)$ $= P(-2 \leqslant E \leqslant 2,5) = \Pi(2,5) - \Pi(-2) = \Pi(2,5) - (1 - \Pi(2)) = \Pi(2,5) + \Pi(2) - 1$. On lit alors sur le formulaire que $P(23,61 \leqslant D \leqslant 23,70) \approx 0,99 + 0,98 - 1 \approx 0,97$.
2) $0,90 = P(23,65 - h < D < 23,65 + h)$ est équivalent à $0,90 = P\left(-\frac{h}{0,02} < E < \frac{h}{0,02}\right) = P(-50h < E < 50h) = 2\Pi(50h) - 1$.
Il nous faut donc trouver h tel que $0,90 = 2\Pi(50h) - 1$ c'est-à-dire $\Pi(50h) = \frac{1+0,90}{2} = 0,95$. On lit dans le fomulaire que $\Pi(1,65) \approx 0,95$ donc $h \approx \dfrac{1,65}{50} \approx 0,033$.
3) D'après la question précédente $P(23,65 - 0,033 < D < 23,65 + 0,033) = 0,90$ On peut donc dire que les diamètres des roulements de la production ont la probabilité 0,90 d'appartenir à l'intervalle $[23,617; 23,683]$.
Qu'on mette des crochets fermés ou des crochets ouverts pour I ne change rien car la probabilité correspondant exactement aux bornes est nulle.

Exercice 2 : *Equation différentielle et étude de fonction*

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

1) D'après le cours les solutions de l'équation (E_0) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$: $x \longmapsto k\mathrm{e}^{2x}$ où k est une constante réelle.
2) On a $h'(x) = \mathrm{e}^{2x} + 2x\mathrm{e}^{2x}$ et donc $h'(x) - 2h(x) = \mathrm{e}^{2x} + 2x\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}$ ainsi on a donc que h est une solution de (E).
3) Les solutions de (E) sont les $x \longmapsto k\mathrm{e}^{2x} + x\mathrm{e}^{2x}$. Ainsi l'ensemble des solutions de (E) est $\left\{x \longmapsto (k+x)\mathrm{e}^{2x} / \text{où } k \text{ est une constante réelle}\right\}$.
4) La fonction f est de la forme $f(x) = (x+k)\mathrm{e}^{2x}$ d'après la question précédente et on doit avoir $f(0) = -1$ donc $-1 = f(0) = (k+0)\mathrm{e}^0$, il faut donc que $k = -1$. Ainsi $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{2x}$.

Partie B : Etude d'une fonction

1) *a)* On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{2x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)\mathrm{e}^{2x} = +\infty$ par produit de limites.

   b) On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)\mathrm{e}^{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{2x} - \lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{2x} = 0 - 0$.
   On a ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

   c) Graphiquement le résultat se traduit par le fait que C admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

2) *a)* Pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $f'(x) = \mathrm{e}^{2x} + 2(x-1)\mathrm{e}^{2x} = (2x-1)e^{2x}$. On a donc bien la forme demandée.

   b) On résout l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$: $(2x-1)e^{2x} \geqslant 0 \Leftrightarrow (2x-1) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{1}{2}$ car une exponentielle est toujours positive.
   L'ensemble solution de l'inéquation est donc $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$.

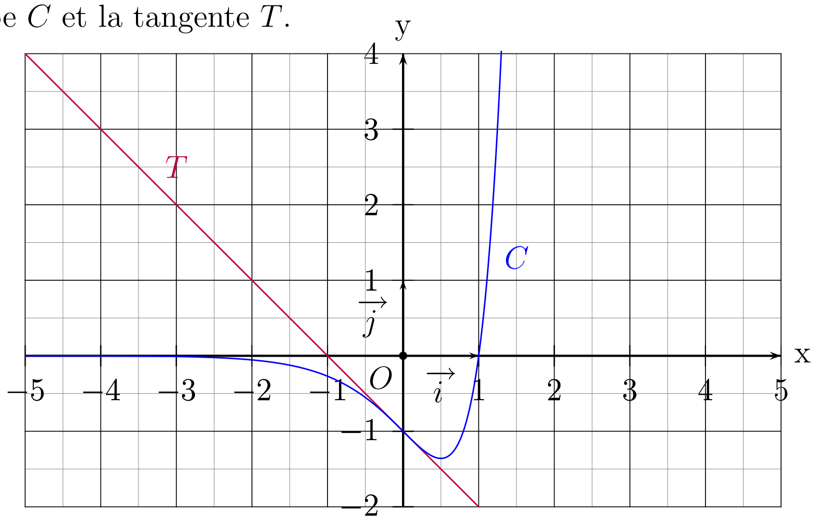
   c) le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ est donné par le signe de $f'(x)$. D'après les questions précédentes on peut dresser le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{\mathrm{e}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

   et $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2} - 1\right)\mathrm{e}^1 = -\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

3) La tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ c'est-à-dire $y = -x - 1$. Pour déterminer la position relative de C par rapport à T il faut déterminer le signe de $(x-1)\mathrm{e}^{2x} - (-x-1) = (x-1)\mathrm{e}^{2x} + x + 1$.
La manière la plus simple de répondre à cette question est d'utiliser *les développements limités* que nous allons voir très bientôt.

4) On trace la courbe C et la tangente T.



Partie C : Calcul intégral

1) On a $I(\alpha) = \displaystyle\int_\alpha^0 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^0 (x-1)\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$. On va faire une intégration par parties en posant $u'(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $v(x) = x - 1$. On a alors $u(x) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}$ et $v'(x) = 1$.
On a donc $I(\alpha) = \left[\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}.(x-1)\right]_\alpha^0 - \displaystyle\int_\alpha^0 1.\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^0.(0-1) - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2\alpha}.(\alpha-1) - \left[\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2x}\right]_\alpha^0 =$ $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2\alpha}.(\alpha-1) - \left(\dfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^0 - \dfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2\alpha}\right) = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} - \mathrm{e}^{2\alpha}\left(\dfrac{1}{2}\alpha - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{3}{4} - \left(\dfrac{1}{2}\,\alpha - \dfrac{3}{4}\right)\mathrm{e}^{2\alpha}$.
On a ainsi obtenu la forme souhaitée.

a) On a $I(\alpha) = -\dfrac{3}{4} - \left(\dfrac{1}{2}\,\alpha - \dfrac{3}{4}\right)\mathrm{e}^{2\alpha} = -\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2}\,\alpha\mathrm{e}^{2\alpha} + \dfrac{3}{4}\mathrm{e}^{2\alpha}$. On a $\displaystyle\lim_{\alpha\to-\infty} \alpha\mathrm{e}^{2\alpha} = 0$ et $\displaystyle\lim_{\alpha\to-\infty} \mathrm{e}^{2\alpha} = 0$ donc par somme des limites on a $\displaystyle\lim_{\alpha\to-\infty} I(\alpha) = -\frac{3}{4} - 0 - 0 = -\frac{3}{4}$.

b) Graphiquement puisque f est négative sur $]-\infty; 0]$, $-I(\alpha)$ représente l'aire entre la courbe l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$ donc $-\displaystyle\lim_{\alpha\to-\infty} I(\alpha)$ représente l'aire entre la courbe et l'axe des abscisses pour l'ensemble des valeurs de x négatives.