Corrigé devoir Maison 6

Exercice 1 : *Inéquations*

1) Pour résoudre cette inéquation il faut déterminer le signe de chacun des facteurs, il nous faut donc résoudre les inéquations

$$\begin{array}{c|c} 7-3x>0 & 2-5x>0 \\ 7>3x & 2>5x \\ \frac{7}{3}>x & \frac{2}{5}>x. \end{array}$$

On peut alors mettre ces résultats dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{2}{5}$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$(7-3x)$		+	|	+	0	-	
$(2-5x)$		+	0	-	|	-	
$(7-3x)(2-5x)$		+	0	-	0	+	

On lit ainsi dans le tableau de signes que l'ensemble solution de l'inéquation $(7-3x)(2-5x)<0$ est $\left]\frac{2}{5};\frac{7}{3}\right[$.

2) Cette inéquation est équivalente aux inéquations suivantes : $4x^2-9\leqslant 0$ puis $(2x-3)(2x+3)\leqslant 0$. Pour résoudre cette dernière inéquation il faut déterminer le signe de chacun des facteurs, il nous faut donc résoudre les inéquations

$$\begin{array}{c|c} 2x-3>0 & 2x+3>0 \\ 2x>3 & 2x>-3 \\ x>\frac{3}{2} & x>-\frac{3}{2}. \end{array}$$

On peut alors mettre ces résultats dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$(2x-3)$		-	|	-	0	+	
$(2x+3)$		-	0	+	|	+	
$(2x-3)(2x+3)$		+	0	-	0	+	

On lit ainsi dans le tableau de signes que l'ensemble solution de l'inéquation $4x^2-9\leqslant 0$ donc de $4x^2\leqslant 9$ est $\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right]$.

3) Pour résoudre cette inéquation il faut déterminer le signe de chacun des facteurs, il nous faut donc résoudre les inéquations

$$\begin{array}{c|c} 3-2x>0 & 8-5x>0 \\ 3>2x & 8>5x \\ \dfrac{3}{2}>x & \dfrac{8}{5}>x. \end{array}$$

On peut alors mettre ces résultats dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$\frac{8}{5}$		$+\infty$
$(3-2x)$		+	0	-	|	-	
$(8-5x)$		+	|	+	0	-	
$(3-2x)(8-5x)$		+	0	-	||	+	

On lit ainsi dans le tableau de signes que l'ensemble solution de l'inéquation $\dfrac{3-2x}{8-5x} \geqslant 0$ est $\left]-\infty; \dfrac{3}{2}\right] \cup \left]\dfrac{8}{5}; +\infty\right[$.

4) Pour résoudre cette inéquation il faut déterminer le signe de chacun des trois facteurs, il nous faut donc résoudre les inéquations

$$\begin{array}{c|c|c} 5-3x>0 & 7+6x>0 & 4-4x>0 \\ 5>3x & 6x>-7 & 4>4x \\ \dfrac{5}{3}>x & x>-\dfrac{7}{6} & 1>x. \end{array}$$

On peut alors mettre ces résultats dans un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{7}{6}$		1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$(5-3x)$		+	|	+	|	+	0	-	
$(7+6x)$		-	0	+	|	+	|	+	
$(4-4x)$		+	|	+	0	-	|	-	
$(5-3x)(7+6x)(4-4x)$		-	0	+	0	-	0	+	

On lit ainsi dans le tableau de signes que l'ensemble solution de l'inéquation $(5-3x)(7+6x)(4-4x) \leqslant 0$ est $\left]-\infty; -\dfrac{7}{6}\right] \cup \left[1; \dfrac{5}{3}\right]$.

Exercice 2 : *Géométrie*

Méthode 1 : les angles géométriques

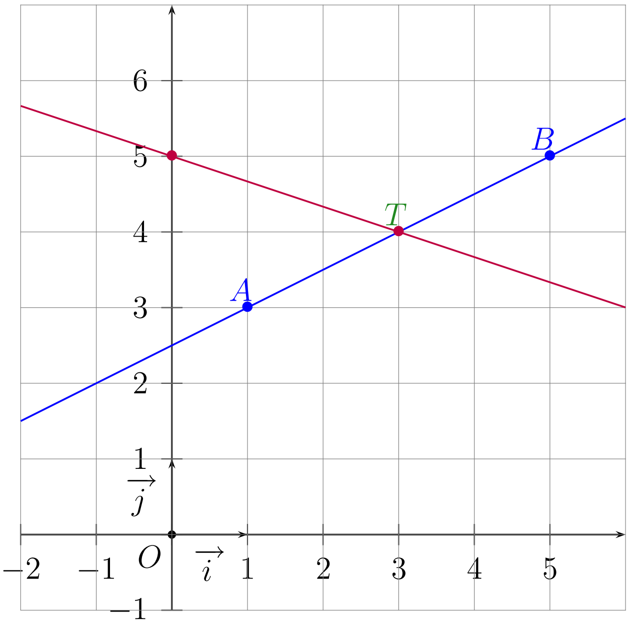
1) Puisque le triangle BAI est équilatéral on a $\widehat{AIB} = 60^\circ$.
Le triangle DIA est isocèle en A donc $\widehat{DIA} = \widehat{ADI}$. De plus $\widehat{IAD} = \widehat{BAD} - \widehat{AIB} = 90 - 60 = 30^\circ$ et donc puisque la somme des angles d'un triangle fait 180° il suit que $30 + 2\widehat{DIA} = 180$ et donc $\widehat{DIA} = \dfrac{180-30}{2} = 75^\circ$.
Puisque le triangle BCJ est équilatéral, $\widehat{CBJ} = 60^\circ$ de plus $\widehat{CBI} = 90 - 60 = 30^\circ$ donc $\widehat{JBI} = \widehat{CBJ} + \widehat{CBI} = 60 + 30 = 90^\circ$, le triangle BIJ est donc rectangle isocèle en B et ainsi $\widehat{BIJ} = \widehat{BJI}$. En considérant la somme des angles du triangle BIJ on a $180 = 90 + 2\widehat{BIJ}$ puis $\widehat{BIJ} = \dfrac{180-90}{2} = 45^\circ$.
2) On a $\widehat{DIJ} = \widehat{DIA} + \widehat{AIB} + \widehat{BIJ} = 75 + 60 + 45 = 180^\circ$ comme demandé et ainsi l'angle $\widehat{DIJ}$ est plat et donc les points D, I et J sont alignés.

Méthode 2 : les coordonnées

1) Les points A, B et D ne sont pas alignés donc $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ est bien un repère du plan.
2) Les coordonnées de D sont $(0; 1)$ car on peut écrire $\overrightarrow{AD} = 0 \times \overrightarrow{AB} + 1 \times \overrightarrow{AD}$.
Appelons H le milieu de $[AB]$. D'après la remarque de l'énoncé ayant $AB = 1$ on a $IH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et ainsi $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IH} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AD}$ et donc les coordonnées de I sont $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
On raisonne de la même façon pour les coordonnées de J. Appelons F le milieu de $[BC]$, ayant $BC = 1$ il suit que $FJ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et donc $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AB} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Les coordonnées de J sont donc $\left(\dfrac{\sqrt{3}+2}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.
3) Pour montrer que les points D, I et J sont alignés il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{DJ}$ sont colinéaires.
On calcule donc les coordonnées de ces deux vecteurs. On a $\overrightarrow{DI}\left(\dfrac{1}{2} - 0; \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)$ c'est-à-dire $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{\sqrt{3}-2}{2}\right)$ et $\overrightarrow{DJ}\left(\dfrac{\sqrt{3}+2}{2} - 0; \dfrac{1}{2} - 1\right)$ c'est-à-dire $\left(\dfrac{\sqrt{3}+2}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$.
On teste alors la colinéarité des deux vecteurs :
$\dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{\sqrt{3}+2}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}-2}{2} = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{(\sqrt{3})^2 - 2^2}{4} = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = 0.$
On peut ainsi dire que les vecteurs sont colinéaires et donc que les points D, I et J sont alignés.

Exercice 3 : *Droites*

1) La droite (D_1) admet une équation du type $y = ax+b$. Son coefficient directeur a est déterminé par le taux de variation $a = \dfrac{5-3}{5-1} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$. Puisque le point B appartient à la droite ses coordonnées sont solutions de l'équation de (D_1) on a donc $5 = \dfrac{1}{2}\times 5+b$ et donc $b = 5-\dfrac{5}{2} = \dfrac{5}{2}$.
   La droite (D_1) admet ainsi $y = \dfrac{1}{2}\ x + \dfrac{5}{2}$ comme équation.
   On trace (D_1) dans le repère $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$.



2) L'ordonnée à l'origine de (D_2) est 5 donc elle passe par le point de cooronnées $(0;5)$. On a par ailleurs $g(3) = -\dfrac{1}{3}\times 3+5 = -1+5 = 4$ donc la droite (D_2) passe par le point de coordonnées $(3;4)$.On peut ainsi tracer la droite (D_2).
3) Les droites (D_1) et (D_2) ne sont pas parallèles car elles n'ont pas le même coefficient directeur.
4) Le point d'intersection des deux droites a ses coordonnées solutions du système $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}\ x + \dfrac{5}{2} \\ y = -\dfrac{1}{3}\ x + 5 \end{cases}$.

   a) Ce système est équivalent aux systèmes suivants : $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}\ x + \dfrac{5}{2} \\ y = -\dfrac{1}{3}\ x + 5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2y = x+5 \\ 3y = -x+15 \end{cases}$
   $\Longleftrightarrow \begin{cases} 2y = x+5 \\ 3y+2y = 15+5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2y = x+5 \\ 3y+2y = 15+5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2y-5 \\ 5y = 20 \end{cases}$
   $\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2\times 4-5 = 3 \\ y = 4 \end{cases}$.
   Ce système admet donc comme solution $(3;4)$.

   b) Le point T a pour coordonnées $(3;4)$ et le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1+5}{2};\dfrac{3+5}{2}\right)$ c'est-à-dire $(3;4)$ par conséquent T est le milieu de $[AB]$.