Corrigé Devoir Maison 1

Exercice 1 : *Equations*

1) On résout l'équation $5x-7=-x-2$:

$$\begin{aligned}5x-7+x&=-2\\6x&=-2+7\\6x&=5\\x&=\frac{5}{6}.\end{aligned}$$

L'équation a pour solution $\frac{5}{6}$.

2) On résout l'équation $\frac{1}{3}x+\frac{5}{6}=-\frac{2}{5}-\frac{3}{4}x$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}x+\frac{5}{6}+\frac{3}{4}x&=-\frac{2}{5}\\\frac{1}{3}x+\frac{3}{4}x&=-\frac{2}{5}-\frac{5}{6}\\\frac{4}{12}x+\frac{9}{12}x&=-\frac{12}{30}-\frac{25}{30}\\\frac{13}{12}x&=-\frac{37}{30}\\x&=-\frac{37}{30}\times\frac{12}{13}\\x&=-\frac{37}{5}\times\frac{2}{13}\\x&=-\frac{74}{65}.\end{aligned}$$

L'équation a pour solution $-\frac{74}{65}$.

3) On résout l'équation $\left(1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{5}=x-\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned}\left(1+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{5}-x&=-\sqrt{3}\\x+\sqrt{2}x+\sqrt{5}-x&=-\sqrt{3}\\\sqrt{2}x&=-\sqrt{3}-\sqrt{5}\\x&=\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\\x&=-\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\sqrt{5}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\\.x&=\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{10}}{2}.\end{aligned}$$

L'équation a pour solution $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{10}}{2}$.

$\Big($*En mathématiques on préfère ne pas avoir de racines au dénominateur d'où la réécriture de* $\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.$\Big)$

Exercice 2 : *Expressions*

1) On développe B et C :
   $B = x^2 + 2x + 1 - 4 = x^2 + 2x - 3$ et $C = x^2 + 3x - x - 3 = x^2 + 2x - 3$.
   On constate que $A = B = C$.

2) On factorise B :
   $B = (x+1)^2 - 2^2 = \big((x+1)-2\big)\big((x+1)+2\big) = (x+1-2)(x+1+2) = (x-1)(x+3)$.
   On a bien retrouvé $B = C$.

3) *a)* Pour résoudre $x^2 + 2x - 3 = -4$ il vaut mieux utiliser B :
   $(x+1)^2 - 4 = -4$
   $(x+1)^2 = 0$
   $x + 1 = 0$
   $x = -1$.
   L'équation $x^2 + 2x - 3 = -4$ a pour solution -1.

   b) Pour résoudre $x^2 + 2x - 3 = 0$ il vaut mieux utiliser C : $(x-1)(x+3) = 0$
   et un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul donc :
   $x - 1 = 0$ ou $x + 3 = 0$
   $x = 1$ ou $x = -3$.
   L'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$ a pour solutions -3 et -1.

   c) Pour résoudre $x^2 + 2x - 3 = -3$ il vaut mieux utiliser A :
   $x^2 + 2x - 3 = -3$
   $x^2 + 2x = 0$
   $x(x+2) = 0$
   Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul donc :
   $x = 0$ ou $x + 2 = 0$
   $x = 0$ ou $x = -2$.
   L'équation $x^2 + 2x - 3 = -3$ a pour solutions 0 et -2.

Exercice 3 : *Moi et la calculatrice*

1) Avec la calculatrice on trouve $A = 0$.

2) Si on développe l'intérieur de la racine on obtient :
   $A = \sqrt{10^{16} - \left(\left(10^8\right)^2 - 4\times 10^8 \times 10^{-8} + \left(2\times 10^{-8}\right)^2\right)}$
   $A = \sqrt{10^{16} - \left(10^{16} - 4 + 4\times 10^{-16}\right)}$
   $A = \sqrt{10^{16} - 10^{16} + 4 - 4\times 10^{-16}}$
   $A = \sqrt{4 - 4\times 10^{-16}}$
   Et on retrouve l'expression proposée par Amélie.
   De plus 4×10^{-16} est négligeable devant 4 donc $A \approx \sqrt{4} \approx 2$.
   C'est donc Amélie qui a raison.
   Quelle est l'erreur de Jonathan ?
   Il est vrai que « 2×10^{-8} est négligeable devant 10^8 » et que « $10^{16} - \left(10^8\right)^2 = 0$ ».
   Mais alors le 2×10^{-8} qu'il a négligé prend toute son importance :
   car il est à comparer, finalement, avec 0 or rien n'est négligeable par rapport à 0.

Pourquoi la calculatrice vous donne $A = 0$?
Parce qu'elle fait des calculs *approchés* et qu'elle ne gère pas bien les nombres à négliger.

Exercice 4 : $\sqrt{2}$ *n'est pas un rationnel*

1. Préambule

1) Si a est pair on peut toujours l'écrire $2k$ avec k un autre entier.
   (On peut écrire $14 = 2\times 7$, $16 = 2\times 8$ ...)
   Ainsi $a^2 = (2k)^2 = 4k^2$ et donc a^2 est un multiple de 4, il est donc pair.
   On a bien montré que si a est pair alors a^2 est pair.
2) Si a est impair on peut toujours l'écrire $2k+1$ avec k un autre entier.
   (On peut écrire $15 = 2\times 7+1$, $17 = 2\times 8+1$ ...)
   Ainsi $a^2 = (2k+1)^2 = (2k)^2 + 2\times 2k + 1^2 = 4k^2 + 4k + 1$.
   Par ailleurs $4k^2 + 4k$ est un multiple de 4 donc il est pair, de sorte que $a^2 = (4k^2 + 4k) + 1$ est toujours impair.
   On a ainsi montré que si a est impair alors a^2 est impair.

2. La démonstration

On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel, c'est-à-dire qu'il existe des entiers naturels a et b, avec $b \neq 0$, tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ où $\frac{a}{b}$ est une fraction irréductible.

1) On a alors $\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ c'est-à-dire $2 = \frac{a^2}{b^2}$ et donc $a^2 = 2b^2$.
2) a^2 est alors un multiple de 2 donc a^2 est pair.
   Dans le préambule on a montré que si a est pair alors a^2 aussi et si a est impair alors a^2 aussi.
   Ici a^2 est pair donc a aussi.
3) On pose $a = 2a'$ avec a' un entier *(on peut car on vient de voir que a est pair)*.
   On a alors $(2a')^2 = 2b^2$ et donc $4(a')^2 = 2b^2$ puis $2(a')^2 = b^2$ ou encore $b^2 = 2(a')^2$.
   Puisque b^2 est un multiple de 2 il est pair, et donc, en réutilisant le préambule, b aussi est pair.
4) On a trouvé que a et b sont pairs or on avait fait l'hypothèse que $\frac{a}{b}$ était une fraction irréductible.
   Il y a donc une contradiction.
5) En supposant qu'on pouvait écrire $\sqrt{2}$ comme une fraction de deux nombres entiers a et b premiers entre eux on aboutit à la contradiction que a et b sont tous les deux multiple de 2. C'est donc que notre supposition n'est pas possible, autrement dit que $\sqrt{2}$ est irrationnel.