Corrigé Devoir Maison 4

Exercice 1 : *Calculs de dérivation*

On calcule les fonctions dérivées des fonctions données :

1) On a $f(x) = \frac{1}{4}x^5 + 2x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 2x - 5$ donc :
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{4}\times 5x^4 + 2\times 4x^3 - \frac{1}{3}\times 3x^2 + \frac{1}{4}\times 2x + 2 - 0 \\ &= \frac{5}{4}x^4 + 8x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x + 2 \end{aligned}$$

2) On a $g(x) = \frac{3}{x} - 2\sqrt{x} + 5x$ donc :
$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{3}{x^2} - 2\times\frac{1}{2\sqrt{x}} + 5 \\ &= -\frac{3}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} + 5 \end{aligned}$$

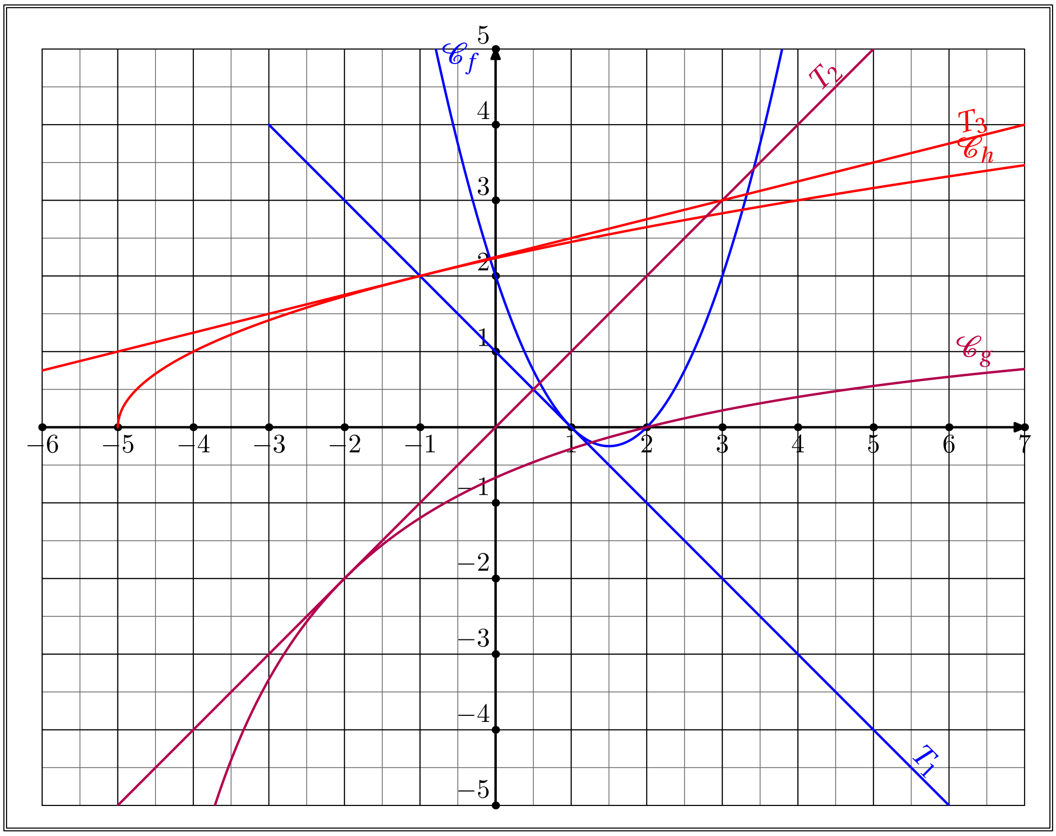
3) On a $h(t) = (-2t^2 + 5t)(\sqrt{t} + 2t)$ donc :
$$\begin{aligned} h'(t) &= (-2t^2+5t)'\times(\sqrt{t}+2t) + (-2t^2+5t)\times(\sqrt{t}+2t)' \\ &= (-4t+5)\times(\sqrt{t}+2t) + (-2t^2+5t)\times\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}+2\right) \end{aligned}$$

Vu l'expression complexe de h' il est inutile ici de développer l'expression, on n'obtiendrait pas forcément une autre expression plus simple.

4) On a $i(x) = \frac{-3+2x}{5x+1}$ donc :
$$\begin{aligned} i'(x) &= \frac{(-3+2x)'\times(5x+1) - (-3+2x)\times(5x+1)'}{(5x+1)^2} \\ &= \frac{(2)\times(5x+1) - (-3+2x)\times(5)}{(5x+1)^2} \\ &= \frac{17}{(5x+1)^2} \end{aligned}$$

5) On a $j(t) = \frac{x^2+3x}{2+3x+x^2}$ donc :
$$\begin{aligned} j'(x) &= \frac{\left(x^2+3x\right)'\times\left(2+3x+x^2\right) - \left(x^2+3x\right)\times\left(2+3x+x^2\right)'}{\left(2+3x+x^2\right)^2} \\ &= \frac{(2x+3)\times\left(2+3x+x^2\right) - \left(x^2+3x\right)\times(3+2x)}{\left(2+3x+x^2\right)^2} \\ &= \frac{(2x+3)\times\left(\left(2+3x+x^2\right) - \left(x^2+3x\right)\right)}{\left(2+3x+x^2\right)^2} \\ &= \frac{(2x+3)\times 2}{\left(2+3x+x^2\right)^2} \\ &= \frac{4x+6}{\left(2+3x+x^2\right)^2} \end{aligned}$$

Exercice 2 : *Tangentes*



On détermine les équations des tangentes avant de les tracer sur le graphique.
L'équation de T_1 est $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.
On calcule $f'(x)$: $f'(x) = 2x - 3$.
On a alors $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$ et $f'(1) = 2 - 3 = -1$.
T_1 a alors pour équation $y = -1 \times (x-1) + 0$ c'est-à-dire $y = -x + 1$.

L'équation de T_2 est $y = g'(-2)\big(x - (-2)\big) + g(-2)$.
On calcule $g'(x)$: $g'(x) = \dfrac{(2x-4)' \times (x+6) - (2x-4) \times (x+6)'}{(x+6)^2} = \dfrac{2 \times (x+6) - (2x-4) \times 1}{(x+6)^2} = \dfrac{16}{(x+6)^2}$.
On a alors $g(-2) = \dfrac{2 \times (-2) - 4}{-2+6} = \dfrac{-8}{4} = -2$ et $g'(-2) = \dfrac{16}{(-2+6)^2} = \dfrac{16}{16} = 1$.
T_2 a alors pour équation $y = 1 \times (x+2) - 2$ c'est-à-dire $y = x$.

L'équation de T_3 est $y = h'(-1)\big(x - (-1)\big) + h(-1)$.
On calcule $h'(x)$: $h'(x) = 1 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x+5}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+5}}$.
On a alors $h(-1) = \sqrt{-1+5} = \sqrt{4} = 2$ et $h'(-1) = \dfrac{1}{2\sqrt{-1+5}} = \dfrac{1}{4}$.
T_3 a alors pour équation $y = \dfrac{1}{4}(x+1) + 2$ c'est-à-dire $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{9}{4}$.

Exercice 3 : ***Des sauts de puce***

Une puce se déplace sur le dos d'un âne.
Son premier saut a une longueur de 40mm. A cause de la fatigue, chacun de ses sauts a une longueur égale à la moitié de la longueur du saut précédent.

1) Au deuxième saut la puce fera un bond de la moitié de 40mm c'est-à-dire 20mm.
   Au troisième saut la puce fera un bond de la moitié de 20mm c'est-à-dire 10mm.
2) On note $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite des longueurs des sauts de cette puce.
   Entre deux sauts consécutifs la distance est divisée par deux donc pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :
   $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n$.
   La suite ainsi crée est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
3) De la question précédente on tire une formule explicite pour l'expression de u_n :
   $u_n = u_1 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 40\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.
   On a une puissance $n-1$ car le premier terme est u_1 et non u_0.
   Ainsi on a pour u_8 le huitième saut : $u_8 = 40\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^7 = 40\times\dfrac{1}{2^7} = \dfrac{40}{128} = \dfrac{5}{16}$.
   Le huitième saut fait environ $0,31$ mm.
4) La distance parcourue au total par la puce au bout de huit sauts est la somme $u_1+\cdots+u_8$.
   C'est la somme des 8 premiers termes d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme 40, elle vaut donc :
   $u_1+\cdots+u_8 = 40\,\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8}{1-\frac{1}{2}} = 40\,\dfrac{1-\frac{1}{2^8}}{\frac{1}{2}} = 40\times\dfrac{2}{1}\times\left(1-\dfrac{1}{256}\right) = 80\times\dfrac{255}{256} = \dfrac{10\times 255}{32} = \dfrac{1275}{16}$.
   Au bout de huit sauts la puce aura parcouru environ $79,7$ mm.