Corrigé Devoir Surveillé 2

Questions de cours :

Exercice 1 : *Inéquations*

1) On résout l'inéquation $\dfrac{4-2x}{x^2+1} \leqslant 3$:
pour cela on réécrit l'inéquation :

$$\frac{4-2x}{x^2+1} - 3 \leqslant 0$$
$$\frac{4-2x-3(x^2+1)}{x^2+1} \leqslant 0$$
$$\frac{-3x^2-2x+1}{x^2+1} \leqslant 0$$

x^2+1 est un trinôme toujours strictement positif par conséquent on peut réécrire l'inéquation $-3x^2-2x+1 \leqslant 0$.
Pour résoudre cette inéquation on calcule son discriminant Δ : $\Delta = (-2)^2 - 4\times(-3) = 4+12 = 16$.
Il est positif donc le trinôme a deux racines $x_1 = \dfrac{2-4}{2\times(-3)}$ et $x_2 = \dfrac{2+4}{2\times(-3)}$ c'est-à-dire $x_1 = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ et $x_2 = -1$.
Le trinôme est négatif à l'extérieur des racines donc sur $]-\infty;-1] \cup \left[\dfrac{1}{3};+\infty\right[$.
Et ainsi l'ensemble solution de l'inéquation de départ est $]-\infty;-1] \cup \left[\dfrac{1}{3};+\infty\right[$.

2) On résout l'inéquation $(x+2)(-x^2-x+6) \geqslant 0$:
on cherche donc le signe de $-x^2-x+6$ pour pouvoir remplir un tableau de signes .
Pour cela on calcule le discriminant de ce trinôme : $\Delta = (-1)^2 - 4\times(-1)\times 6 = 1+24 = 25$.
Il est positif donc le trinôme a deux racines qui sont $x_1 = \dfrac{1-5}{2\times(-1)}$ et $x_2 = \dfrac{1+5}{2\times(-1)}$ c'est-à-dire $x_1 = 2$ et $x_2 = -3$.
On sait que le trinôme est positif à l'intérieur des racines et négatif à l'extérieur.
On peut à présent remplir un tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		-2		2		$+\infty$
$-x^2-x+6$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$(x+2)(-x^2-x+6)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

On lit dans le tableau de signes que l'ensemble solution de l'inéquation est $[-\infty;-3] \cup [-2;2]$.

Exercice 2 : *Etude de fonction*

1) L'ensemble de définition maximal de f est l'ensemble des x tels que la racine existe, autrement dit tels que $4-x^2 \geqslant 0$.
   On peut factoriser ce trinôme en $(2-x)(2+x)$.
   Ses racines sont donc 2 et -2 et ce trinôme est positif à l'intérieur des racines.
   Autrement dit l'ensemble de définition maximal de f est $[-2;2]$.
2) Soit g la fonction racine définie sur $[0;+\infty[$ et h la fonction définie sur $[-2;2]$ par $h(x)=4-x^2$.
   Pour tout x de $[-2;2]$ on a bien $h(x)$ dans $[0;+\infty[$ et $g\big(h(x)\big)=\sqrt{4-x^2}=f(x)$, par conséquent, on a bien $f=g\circ h$.
3) La fonction g est une fonction de référence, elle est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
   La fonction h a les mêmes variations que la fonction $x\mapsto -x^2$ sur $[-2;2]$ laquelle a les variations exactement inverses à celles de la fonction carré sur $[-2;2]$.
   Autrement dit la fonction h est croissante sur $[-2;0]$ et décroissnte sur $[0;2]$.
4) Sur $[0;2]$ h est décroissante et $h(x)$ appartient à $[0;4]$ *(car $h(0)=4$ et $h(2)=4-4=0$)*.
   Sur $[0;4]$ la fonction g est croissante donc, par composition des fonctions, la fonction f est décroissante sur $[0;2]$.
   Sur $[2;0]$ h est croissante et $h(x)$ appartient à $[0;4]$ *(car $h(-2)=4-4=0$ et $h(0)=4$)*.
   Sur $[0;4]$ la fonction g est croissante donc, par composition des fonctions, la fonction f est croissante sur $[-2;0]$.
5) Grâce à la question précédente on dresse le tableau de variations de f .

x	-2		0		2
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Et on a bien $f(-2)=g\big(h(-2)\big)=g(0)=0$, $f(0)=g\big(h(0)\big)=g(4)=2$ et $f(2)=g\big(h(2)\big)=g(0)=0$.