Corrigé Devoir Surveillé 1

Questions de cours :

Exercice 1 : *Trinômes du second degré*

1) On cherche la forme canonique du trinôme $3x^2+6x+1$:

$$\begin{aligned} 3x^2+6x+1 &= 3\left(x^2+2x+\frac{1}{3}\right) \\ &= 3\left(x^2+2x+1-1+\frac{1}{3}\right) \\ &= 3\left((x+1)^2-1+\frac{1}{3}\right) \\ &= 3\left((x+1)^2-\frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

On a ainsi la forme canonique $3x^2+6x+1=3\left((x+1)^2-\frac{2}{3}\right)$.

2) Pour résoudre l'équation $-3x^2+7x-4=0$ on calcule son discriminant:
$\Delta=7^2-4\times(-3)\times(-4)=49-48=1.$
Δ est positif donc l'équation a deux solutions qui sont :

$$x_1=\frac{-7-1}{2\times(-3)} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-7+1}{2\times(-3)}$$
$$x_1=\frac{8}{6} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{6}{6}$$
$$x_1=\frac{4}{3} \quad \text{et} \quad x_2=1.$$

L'équation a pour solutions 1 et $\frac{4}{3}$.

3) Pour résoudre l'équation $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}=0$ on calcule son discriminant:
$\Delta=\left(-\frac{1}{3}\right)^2-4\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{9}-\frac{1}{9}=0.$
Δ est nul donc l'équation a une solution qui est :
$x=\frac{\frac{1}{3}}{2\times\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\times2=\frac{2}{3}.$
L'équation a pour solution $\frac{2}{3}$.

4) Pour résoudre l'inéquation $x^2+4x+3\leqslant 0$, on cherche les racines du trinôme x^2+4x+3 et donc on calcule le discriminant de celui-ci :
$\Delta=4^2-4\times3=16-12=4.$
Δ est positif donc le trinôme admet deux racines qui sont :

$$x_1=\frac{-4-2}{2} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-4+2}{2}$$
$$x_1=\frac{-6}{2} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-2}{2}$$
$$x_1=-3 \quad \text{et} \quad x_2=-1.$$

D'après le cours ce trinôme est négatif à l'intérieur des racines donc l'inéquation $x^2+4x+3 \leqslant 0$ a pour ensemble solution $[-3;-1]$.

Exercice 2 : *Géométrie*

1) Les trois cercles ont même rayon R et sont tous trois tangents donc la distance entre deux milieux quelconques de ces cercles est toujours la même c'est-à-dire $2R$.
Le triangle $O_1O_2O_3$ est donc équilatéral.
2) On appelle I le milieu de $[O_1O_2]$. Puisque le triangle est équilatéral la médiane $[IO_3]$ est aussi une hauteur du triangle.
Dans le triangle rectangle IO_1O_3 on a, d'après le théorème de Pythagore, $IO_1^2 + IO_3^2 = O_1O_3^2$ c'est-à-dire , puisque $IO_1 = R$ et $O_1O_3 = 2R$:
$R^2 + IO_3^2 = 4R^2$ et donc $IO_3^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2$ puis $IO_3 = R\sqrt{3}$.
La mesure d'une hauteur vaut donc bien $R\sqrt{3}$.
L'aire du triangle $O_1O_2O_3$ vaut $\dfrac{2R\times R\sqrt{3}}{2} = R^2\sqrt{3}$.
3) L'aire du domaine colorié est égale à l'aire du triangle $O_1O_2O_3$ moins les trois portions de disque. Ces trois portions ont la même aire car ce sont tous trois des secteurs angulaires de 60° par conséquent l'aire globale de ces trois secteurs correspond à celle d'un demi-disque soit $\dfrac{\pi R^2}{2}$.
L'aire coloriée vaut donc $R^2\sqrt{3} - \dfrac{\pi R^2}{2} = R^2\left(\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{2}\right)$.
(On peut vérifier que $\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{2}$ est bien positif ce qui rend le calcul plausible.)