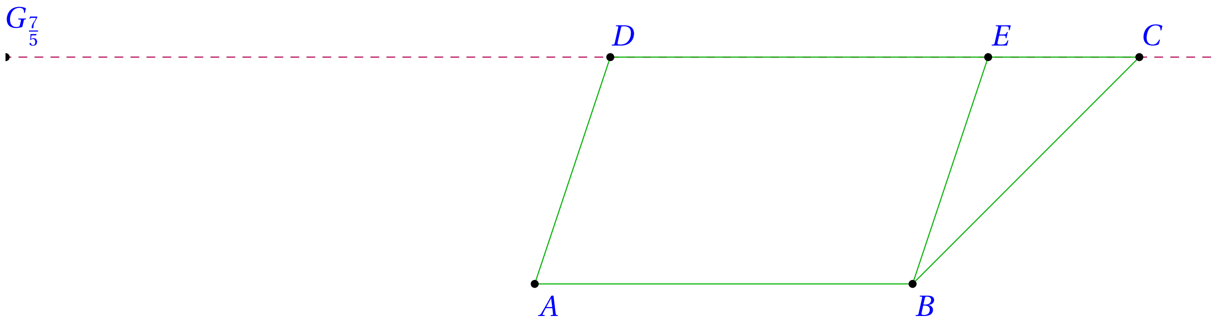
Corrigé Devoir Maison 8

Exercice 1 : *Barycentres*

1) *a)* on fait une figure.



b) De l'énoncé on tire que $\overrightarrow{BA} = \frac{5}{7}\overrightarrow{CD}$ donc :

$$\begin{aligned} 7\overrightarrow{BA} &= 5\overrightarrow{CD} \\ 7\overrightarrow{BA} &= 5\overrightarrow{CB} + 5\overrightarrow{BD} \\ 7\overrightarrow{BA} + 5\overrightarrow{BC} - 5\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{0} \\ B &= \mathrm{bar}\{(A,7),(C,5),(D,-5)\} \end{aligned}$$

On a donc bien la formule demandée.

2) *a)* On a $5\overrightarrow{EC} + 2\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{0}$ donc $7\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{CD}$ puis $\overrightarrow{CE} = \frac{2}{7}\overrightarrow{CD}$ ce qui permet de placer le point E.

b) On considère I le milieu du segment $[AE]$, alors on a $I = \mathrm{bar}\{(A,7),(E,7)\}$ et d'après le théorème du barycentre partiel et la question précédente :

$$\begin{aligned} I &= \mathrm{bar}\{(A,7),(C,5),(D,2)\} \\ I &= \mathrm{bar}\{(A,7),(C,5),(D,-5+7)\} \\ I &= \mathrm{bar}\{(A,7),(C,5),(D,-5),(D,7)\} \\ I &= \mathrm{bar}\{(B,7+5-5),(D,7)\} \\ I &= \mathrm{bar}\{(B,7),(D,7)\} \end{aligned}$$

C 'est-à-dire que I est aussi le milieu du segment $[BD]$.
Le quadrilatère $ABED$ dont les diagonales se coupent en leur milieu est ainsi un parallélogramme.
Cette question était particulièrement difficile.

3) *a)* Le système Σ admet un barycentre dès que $m + (-m) + 1 \neq 0$ c'est-à-dire pour toutes les valeurs de m.

b) On a :

$$\begin{aligned} m\overrightarrow{G_mA} - m\overrightarrow{G_mB} + \overrightarrow{G_mD} &= \overrightarrow{0} \\ m\overrightarrow{G_mA} - m\overrightarrow{G_mA} - m\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{G_mD} &= \overrightarrow{0} \\ m\overrightarrow{BA} &= \overrightarrow{DG_m}. \end{aligned}$$

Ainsi $\overrightarrow{DG_m}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires donc G_m appartient à la droite (CD) et puisque le coefficient de colinéarité (m donc) varie dans $\mathbb{R}$, G_m décrit toute la droite (CD).
Le lieu géométrique de G_m lorsque m varie est ainsi la droite (CD).

c) On va déterminer la relation entre $\overrightarrow{DG_m}$ et $\overrightarrow{BA}$ qui, d'après la question précédente nous déterminera la valeur de m.
Pour que le point G_m soit le symétrique de C par rapport à D il faut que D soit le milieu de $[CG_m]$ c'est-à-dire que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DG_m}$.
On sait par ailleurs que $\overrightarrow{BA} = \frac{5}{7}\overrightarrow{CD}$ donc $\overrightarrow{CD} = \frac{7}{5}\overrightarrow{BA}$ puis $\overrightarrow{DG_m} = \frac{7}{5}\overrightarrow{BA}$ et donc m vaut alors $\frac{7}{5}$.

Exercice 2 : *Etude de fonction*

1) La fonction racine étant définie sur $\mathbb{R}^+$ on a $\mathcal{D}_f = [0;+\infty[$.
2) Sur $]0;+\infty[$ la fonction f est le produit de deux fonctions dérivables donc elle est dérivable.
On ne sait rien à priori d'une éventuelle dérivée en 0 car la fonction racine n'y est pas dérivable.
Sur $]0;+\infty[$ on a :
$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2}{3}x\right)' \times \sqrt{x} + \frac{2}{3}x \times \left(\sqrt{x}\right)' \\ &= \frac{2}{3} \times \sqrt{x} + \frac{2}{3}x \times \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{3}\frac{x}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{3}\sqrt{x} \end{aligned}$$
On a ainsi $f'(x) = \sqrt{x}$ sur $]0;+\infty[$.
3) Pour montrer que la fonction f est dérivable en 0 il faut calculer le taux de variation en 0.
On a $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\frac{2}{3}h\sqrt{h}-0}{h} = \frac{2}{3}\sqrt{h}$ donc $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0$.
La fonction f est ainsi dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
4) La tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = f'(0)x + f(0) = 0 \times x + 0 = 0$.
La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est l'axe des abscisses.
5) Puisque $f'(0) = 0$ et que $\sqrt{0} = 0$ on a pour tout x de $[0;+\infty[$ $f'(x) = \sqrt{x}$.
Même si le résultat paraît normal avec $f'(x) = \sqrt{x}$ il n'est pas évident car dans le calcul de f' sur $]0;+\infty[$ on a simplifié une écriture $\frac{x}{\sqrt{x}}$ qui n'existe pas en 0.
La fonction racine étant toujours positive on peut dresser le tableau de variations de f :

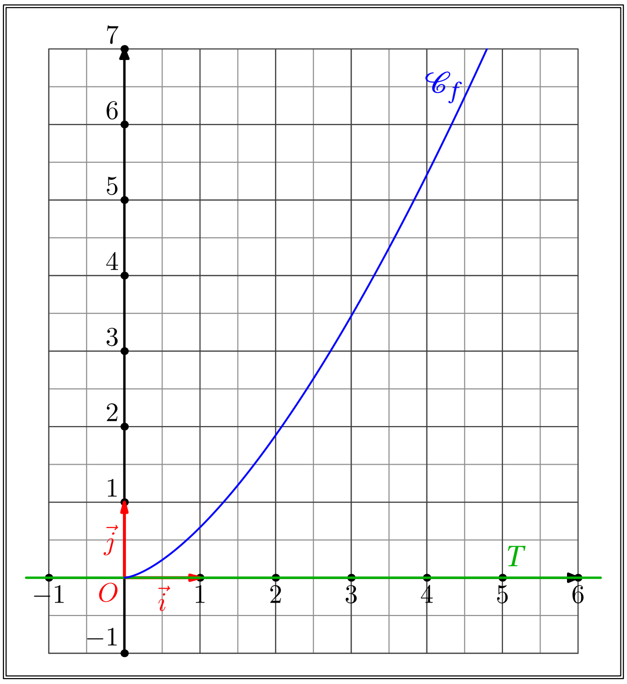
x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

On a $f(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ car $f(x)$ est le produit de deux fonctions qui tendent vers $+\infty$ en $+\infty$.

La limite est donné à titre indicatif.

6) On complète un tableau de valeurs à 0,01 près puis on trace T et $\mathscr{C}_f$.

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
$f(x)$	0,24	0,67	1,22	1,89	2,64	3,46	4,37	5,33	6,36



Exercice 3 : *Attention à l'arnaque*

1) Au bout d'un mois l'inflation correspond à un changement des prix du type «prix$\times\left(1+\dfrac{0,1}{100}\right)$» c'est-à-dire «prix$\times 1,001$».
Au bout de 2 mois le changement correspond à «prix$\times 1,001^2$». Au bout d'une année, donc de 12 mois, le changement est «prix$\times 1,001^{12}$».
L'inflation I vaut donc $I=$ «$\dfrac{\text{nouveau prix}-\text{prix}}{\text{prix}}$» $=$ «$\dfrac{\text{prix}\times 1,001^{12}-\text{prix}}{\text{prix}}$» $=1,001^{12}-1\approx 0,012$ c'est-à-dire $1,2\%$.

2) *a)* On regarde la fonction $x\mapsto(1+x)^{12}$ comme la fonction $X\mapsto X^{12}$ composée avec $x\mapsto 1+x$.
Sa dérivée vaut donc $1\times\left(12\times(1+x)^{11}\right)$ c'est-à-dire $12(1+x)^{11}$.

b) Au voisinage de 0 on a $(1+x)^{12}\approx 12(1+0)^{11}(x-0)+(1+0)^{12}$ c'est-à-dire $(1+x)^{12}\approx 12x+1$.

c) D'après ce qui précéde on a $\left(1+\dfrac{0,1}{100}\right)^{12}\approx 12\times\dfrac{0,1}{100}+1$ d'où $I\approx\left(12\times\dfrac{0,1}{100}+1\right)-1\approx 1,2\%$.

3) On note I' la nouvelle inflation.
Les calculs précédents restent les mêmes donc le changement sur les prix sera «prix$\times\left(1+\dfrac{5}{100}\right)^{12}$» c'est-à-dire «prix$\times 1,05^{12}$».
On a alors $I'=1,05^{12}-1\approx 0,796$ c'est-à-dire $79,6\%$.
Avec l'approximation affine on obtient $I'\approx\left(12\times\dfrac{5}{100}+1\right)-1$ c'est-à-dire $I'\approx 60\%$.

4) Samantha a fait le calcul $10\,000\times\left(1+\dfrac{5}{100}\right)^{12}\approx 10\,000\times\left(12\times\dfrac{5}{100}+1\right)$.

   Il correspond à prendre l'approximation affine pour calculer l'inflation I' or cette approximation (60%) est assez loin de la valeur réelle (79,6%) de I'.

   Son calcul est trop éloigné de la réalité car l'approximation affine n'est pertinente que pour des «petites valeurs» autour de 0 et 5% c'est déjà trop grand.

   Jarod, qui est malin, ne tombera surement pas dans le piège !

   En revanche pour la valeur $0,1\%$ l'approximation affine reste pertinente, $0,1\%$ est assez «petit».