Corrigé devoir Maison 6

Exercice 1 : *Etude de fonction*

1) On doit déterminer la limite de la fonction f en $-\infty, 1^-, 1^+$ et $+\infty$.
Comme on l'a vu en TD pour les limites en $-\infty$ et $+\infty$ il faut transformer l'écriture de la fonction : $f(x) = \dfrac{x^2(-1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2})}{x(\frac{1}{x}-1)} = x\dfrac{-1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x}-1}$.
Et on a $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x}-1} = \dfrac{-1-0+0}{0-1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ donc par produit on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
De même on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x}-1} = \dfrac{-1-0+0}{0-1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc par produit on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
On a aussi $\lim\limits_{x\to1}(-x^2-2x+5) = -1+2+5 = 6$, $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x) = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to1^+}(1-x) = 0^-$ donc par quotient on a $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$.

2) *a)* On a $ax+b+\dfrac{c}{x-1} = \dfrac{(ax+b)(1-x)-c}{1-x} = \dfrac{-ax^2+(a-b)x+b-c}{1-x}$ donc si on veut que cette expression soit égale à $f(x)$ il faut identifier les coefficients du numérateur : $-a=-1$; $a-b=-2$; $b-c=5$ et donc $a=1$; $b=3$; $c=-2$.
Ainsi on a pour tout réel x différent de 1 $f(x) = x+3-\dfrac{2}{x-1}$.
Attention à ne pas confondre $x-1$ et $1-x$.
On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{x-1} = 0$ par quotient.

b) On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3) = +\infty$ donc par somme on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+3-\dfrac{2}{x-1}\right) = +\infty$, on a aussi $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2}{x-1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+3) = -\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+3-\dfrac{2}{x-1}\right) = -\infty$.
On a $\lim\limits_{x\to1}(x+3) = 4$, $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{-2}{x-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{-2}{x-1} = -\infty$ par quotient donc par somme il suit que $\lim\limits_{x\to1^-}\left(x+3-\dfrac{2}{x-1}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+}\left(x+3-\dfrac{2}{x-1}\right) = -\infty$.
On a ainsi retrouvé les limites de la question 1).

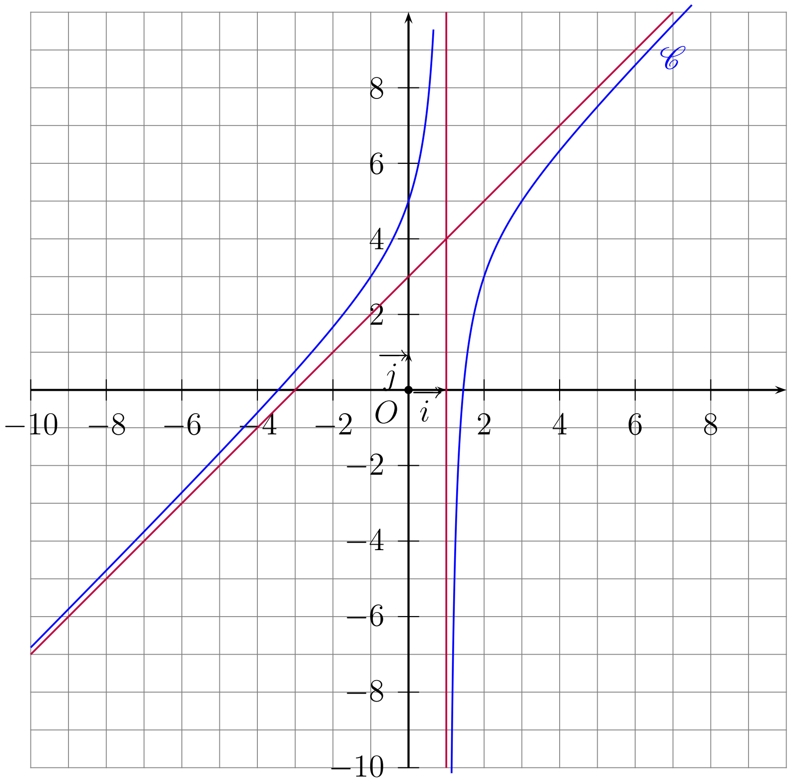
3) On dresse le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4) De $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ on tire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.
On a également $f(x) = x + 3 - \dfrac{2}{x-1}$ et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{x-1} = 0$ et donc $\lim_{x\to-\infty} (f(x) - (x+3)) = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{-2}{x-1} = 0$ donc $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique d'équation $y = x + 3$ en $-\infty$.
On a aussi $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (x+3)) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{x-1} = 0$ donc la droite d'équation $y = x + 3$ est aussi asymptote oblique en $+\infty$.

5) On a $d(x) = f(x) - (x+3) = -\dfrac{2}{x-1}$ donc d est positive sur $]-\infty; 1[$ et négative sur $]1; +\infty[$.
Lorsque d est positive cela se traduit par le fait que $\mathscr{C}$ est au dessus de la droite d'équation $y = x + 3$ et lorsque d est négative cela se traduit par le fait que $\mathscr{C}$ est au dessous de la droite d'équation $y = x + 3$.

6) On trace $\mathscr{C}$ et ses asymptotes.



Exercice 2 : *Equation de cercle*

1) C_0 est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $x^2 + y^2 + 8y - 10 = 0$ c'est-à-dire $x^2 + (y+4)^2 - 16 - 10 = 0$ puis $x^2 + (y+4)^2 = 26$, c'est donc le cercle de centre le point de

coordonnées $(0;-4)$ et de rayon $\sqrt{26}$.
De même C_1 est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $x^2+y^2+x+7y-10=0$ c'est-à-dire $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{7}{2}\right)^2=\frac{45}{2}$, c'est donc le cercle de centre le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{2};-\frac{7}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{45}{2}}=3\sqrt{\frac{5}{2}}$.
Et C_2 est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $x^2+y^2+2x+6y-10=0$ c'est-à-dire $(x+1)^2+(y+3)^2=20$, c'est donc le cercle de centre $(-1;-3)$ et de rayon $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

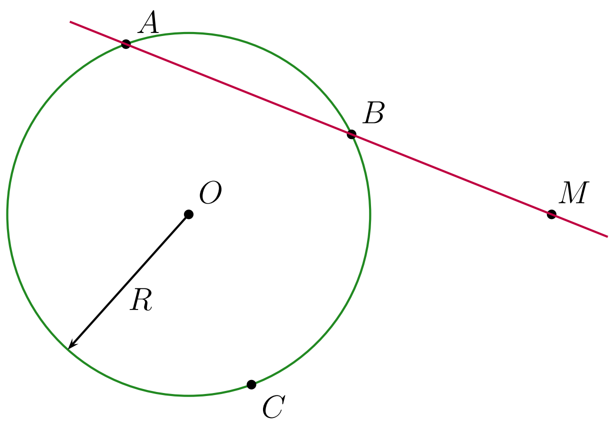
2) L'ensemble C_k est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $x^2+y^2+kx+(8-k)y-10=0$. c'est-à-dire $\left(x+\frac{k}{2}\right)^2+\left(y+\frac{8-k}{2}\right)^2-\frac{k^2}{4}-\frac{(8-k)^2}{4}-10=0$ puis $\left(x+\frac{k}{2}\right)^2+\left(y+\frac{8-k}{2}\right)^2=\frac{k^2+(8-k)^2+40}{4}$ et comme $\frac{k^2+(8-k)^2+40}{4}$ est toujours positif (d'où l'intérêt de le laisser sous forme non développée) l'ensemble C_k est le cercle de centre le point Ω_k de coordonnées $\left(-\frac{k}{2};-\frac{8-k}{2}\right)$ et de rayon $R_k=\sqrt{\frac{k^2+(8-k)^2+40}{4}}$.

3) Les coordonnées des points d'intersection des cercles C_0 et C_1 sont solutions du système $\begin{cases} x^2+y^2+8y-10=0 \\ x^2+y^2+x+7y-10=0 \end{cases}$ qu'on résout :
$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+8y-7y=0 \\ x^2+y^2+x+7y-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x^2+x^2+x+7x-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ 2x^2+8x-10=0 \end{cases}$.
Il nous faut donc résoudre l'équation $2x^2+8x-10=0$ c'est-à-dire $x^2+4x+5=0$. 1 est racine évidente et donc l'autre racine est forcément -5 car la somme doit faire -4.
Le système a donc deux solutions $(1;1)$ et $(-5;-5)$ qui sont les coordonnées de A et B.

4) On a $1^2+1^2+k+8-k-10=0$ et $(-5)^2+(-5)^2-5k-(8-k)5-10=25+25-5k-40+5k-10=0$ donc tous les cercles C_k passent par les points A et B.

Exercice 3 : *Puissance d'un point par rapport à un cercle*

On fait une figure afin de nous aider à résoudre les questions. (Avec M situé à l'extérieur du cercle.)



1) *a)* On a $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{CB}$ et le triangle ABC inscrit dans un demi-cercle est rectangle en B ainsi (AB) et (BC), et donc (MA) et (CB), sont perpendiculaires. Le

produit scalaire $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{CB}$ est donc nul.
On a bien $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}$.

b) On a $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = MO^2 + \overrightarrow{MO}\cdot(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}) - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA} = OM^2 - R^2$ car O est le milieu de $[AC]$ et $OA = R$.
Ainsi $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ ne dépend que de M O et R et donc ne dépend pas de la droite choisie.

2) Si le point M est situé à l'intérieur du cercle on a encore $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{CB} = 0$ donc $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}$ et le calcul sur $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}$ de la question précédente ne dépend pas de la position de M donc on a encore $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = OM^2 - R^2$.

3) *a)* Si le point M appartient au cercle C l'un des deux points A ou B est confondu avec M.

b) Le résultat obtenu aux questions précédentes est encore valable car alors $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$ car soit $\overrightarrow{MA}$ soit $\overrightarrow{MB}$ est le vecteur nul et $OM = R$ donc $OM^2 - R^2 = 0$.
Que le résultat ne change pas avec la position de M ne signifie pas qu'il n'est pas important de le vérifier.

4) *a)* Si la droite D est tangente au cercle C les points A et B seront confondus.

b) S'il n'y a qu'un point d'intersection T entre le cercle et la droite D alors celle-ci est tangente au cercle et notamment elle est perpendiculaire au rayon $[OT]$. Le triangle MOT est alors rectangle en T donc d'après le théorème de Pythagore on a $OM^2 = MT^2 + OT^2$ c'est-à-dire $MT^2 = OM^2 - R^2$.