Corrigé Devoir Maison 6

Exercice 1 : *Barycentres et alignement*

Soient B et C deux points distincts du plan $\mathscr{P}$.

1) On a

$$\begin{aligned} -3\overrightarrow{GB}+5\overrightarrow{GC} &= \overrightarrow{0} \\ -3\overrightarrow{GB}+5\overrightarrow{GB}+5\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{0} \\ 2\overrightarrow{GB}+5\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{0} \\ 2\overrightarrow{BG} &= 5\overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

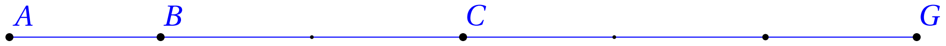
De $\overrightarrow{BG}=\frac{5}{2}\overrightarrow{BC}$ on tire que G est l'image de B par la translation de vecteur $\frac{5}{2}\overrightarrow{BC}$, ce qui permet de placer le point G sur la figure ci-dessous.

2) Pour tout point M de $\mathscr{P}$ ona $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$ donc

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{0} \\ -3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{0} \\ -3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{0} \\ -2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{0} \\ 2\overrightarrow{BA} &= -\overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

De l'égalité $\overrightarrow{BA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ on tire que $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et donc que les points A, B et C sont alignés.
On place le point A sur la figure ci-dessous.
Dans cette question les points M ne servent à rien, c'est voulu...

3) On a $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.
Et on a $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BG}=-\overrightarrow{BC}+\frac{5}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.
On a donc $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CG}$ et ainsi le point C est le milieu de $[AG]$.



Exercice 2 : *Radioactivité*

1) D'après l'énoncé on a $u_1=850-850\times\frac{15}{100}=\frac{72250}{100}=\frac{1445}{2}$.
La valeur trouvée pour u_1 est $722,5$ Bq.
On a ensuite $u_2=\frac{1445}{2}-\frac{1445}{2}\times\frac{15}{100}=\frac{122825}{200}=\frac{4913}{8}$.
La valeur trouvée pour u_2 est $614,125$ Bq

2) D'après l'énoncé on a pour tout n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n - u_n \times \frac{15}{100} \\ &= u_n \times \left(1 - \frac{15}{100}\right) \\ &= u_n \times \frac{85}{100} = \frac{17}{20} u_n \end{aligned}$$

Ainsi (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{17}{20}$.

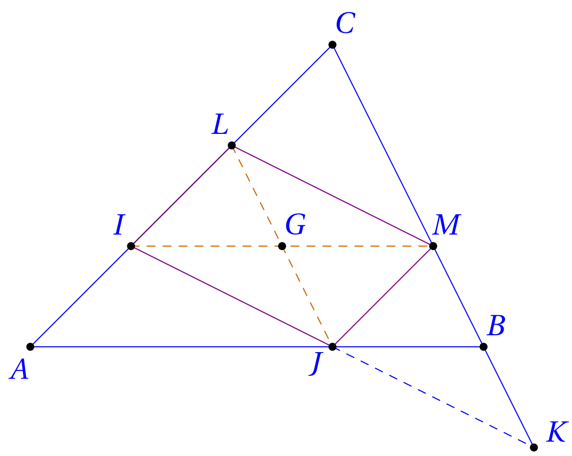
3) Puisque (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{17}{20}$ on a pour tout n : $u_n = u_0 \times \left(\frac{17}{20}\right)^n$ c'est-à-dire $u_n = 850 \times \left(\frac{17}{20}\right)^n$.

4) On cherche le plus petit nombre n tel que $u_n < 25$.
L'inéquation se réécrit $850 \times \left(\frac{17}{20}\right)^n < 25$ puis $\left(\frac{17}{20}\right)^n < \frac{25}{850}$ c'est-à-dire $\left(\frac{17}{20}\right)^n < \frac{1}{34}$.
A l'aide de la calculatrice, en faisant de mulmtiples essais on trouve la valeur $n = 22$.
(En Terminale vous pourrez résoudre ce type d'équation avec l'inconnue en exposant.)
Il faut au moins 22 couches de matériau afin d'obtenir une radioactivité inférieure à 25Bq.

Exercice 3 : *Barycentres dans une figure*

Soit ABC un triangle.

1) *a)* On a $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$ donc à l'aide de la relation de Chasles on trouve $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, ce qui permet de placer I .
On a de même $\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} = \overrightarrow{0}$ donc à l'aide de la relation de Chasles on trouve $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, ce qui permet de placer J .
On a enfin $-4\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}$ et donc on trouve $\overrightarrow{BK} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, ce qui permet de placer K .
On fait à présent une figure :



b) De $-4\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}$ on déduit que

$$\begin{aligned} -4\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{0} \\ -3\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{BK} &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

ce que l'on peut traduire par $B = \text{bar}\{(C,1),(K,3)\}$.

2) *a)* A l'aide du théorème sur les barycentres partiels *(aussi appelé théorème de l'associativité)*, puisque $B = \text{bar}\{(C,1),(K,3)\}$ on a

$$\begin{aligned}\text{bar}\{(A,2),(C,1),(K,3)\} &= \text{bar}\{(A,2),(B,1+3)\}\\ &= \text{bar}\{(A,1),(B,2)\}\\ &= J\end{aligned}$$

On a donc bien $J = \text{bar}\{(A,2),(C,1),(K,3)\}$.

b) De même on a

$$\begin{aligned}\text{bar}\{(A,2),(C,1),(K,3)\} &= \text{bar}\{(I,2+1),(K,3)\}\\ &= \text{bar}\{(I,3),(K,3)\}\\ &= \text{bar}\{(I,1),(K,1)\}\end{aligned}$$

donc J est l'isobarycentre de I et K, c'est-à-dire que J est le milieu de $[IK]$.

3) *a)* On a M milieu de $[CK]$ donc, en utilisant la relation de Chasles et la question 1)*a)* :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MC} &= \overrightarrow{0}\\ \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{0}\\ 2\overrightarrow{MB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{0}\\ 2\overrightarrow{BM} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{BM} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

Dans le triangle ABC on a $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ *(car $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$)* et $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ donc, d'après le théorème de Thalès, (JM) et (AC) sont parallèles et on a $\overrightarrow{JM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Par ailleurs on a $\overrightarrow{IL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{IC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ *(car $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$)* donc $\overrightarrow{IL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Ainsi $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{JM}$ et le quadrilatère $IJML$ est donc un parallélogramme.

b) De $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ on tire que $M = \text{bar}\{(B,2),(C,1)\}$. Le centre G de $IJML$ est le milieu de $[IM]$. On a donc grâçe au théorème sur les barycentres partiels :

$$\begin{aligned}G &= \text{bar}\{(I,1),(M,1)\}\\ &= \text{bar}\{(I,3),(M,3)\}\\ &= \text{bar}\{(A,2),(C,1),(B,2),(C,1)\}\\ &= \text{bar}\{(A,2),(C,2),(B,2)\}\\ &= \text{bar}\{(A,1),(C,1),(B,1)\}\end{aligned}$$

et donc G est bien l'isobarycentre de ABC.