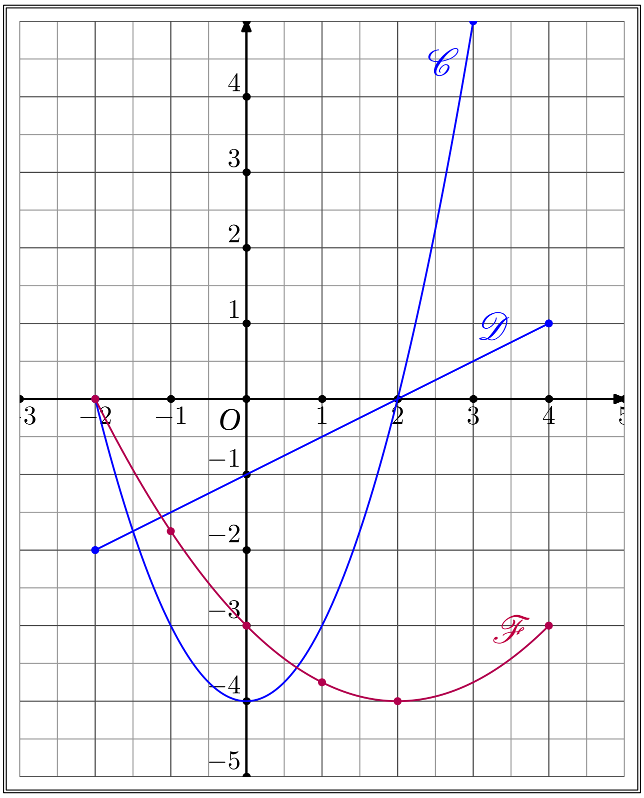
Corrigé Devoir Maison 4

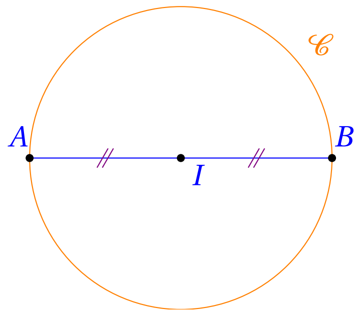
Exercice 1 : *Composition et lecture graphique*

1) On lit sur le graphique que l'ensemble de définition I de u est $[-2;4]$ et que l'ensemble de définition J de v est $[-2;3]$.
2) Les valeurs de $u(x)$ sont comprises dans $[-2;1]$ celles de $v(x)$ sont comprises dans $[-4;5]$.
3) Puisque v est défini sur $[2;3]$ qui contient $[-2;1]$ $\big($l'ensemble des valeurs prises par $u(x)\big)$ on peut bien définir $f = v \circ u$ sur $[-2;4]$, l'ensemble de définition de u.
4) D'après la définition de f et par lecture graphique on a :
   $f(-2) = v\big(u(-2)\big) = v(-2) = 0$;
   $f(-1) = v\big(u(-1)\big) = v\left(-\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{7}{4}$;
   $f(0) = v\big(u(0)\big) = v(-1) = -3$;
   $f(1) = v\big(u(1)\big) = v\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{15}{4}$;
   $f(2) = v\big(u(2)\big) = v(0) = -4$
   et $f(4) = v\big(u(4)\big) = v(1) = -3$.
   On peut donc les placer sur le graphique.
5) On lit sur le graphique que u est croissante sur $[-2;2]$ à valeurs dans $[-2;0]$ et v est décroissante sur $[-2;0]$ donc par composition des fonctions f est décroissante sur $[-2;2]$.
   On lit sur le graphique que u est croissante sur $[2;4]$ à valeurs dans $[0;1]$ et v est croissante sur $[0;1]$ donc par composition des fonctions f est croissante sur $[2;4]$.
6) on trace $\mathscr{F}$ sur le graphique ci-dessous.



Exercice 2 : *Lieux de points*

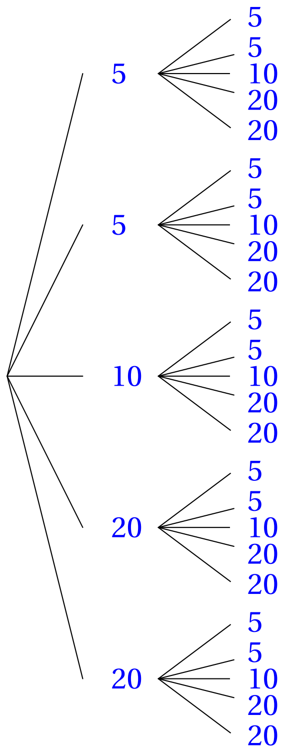
1) D'après la relation de Chasles, pour tout point M du plan, on a
   $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$.
   De plus puisque I est le milieu de $[AB]$ on a $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou encore $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$ et donc on a bien la formule $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.
2) On peut alors réécrire «l'équation» :
   $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MI}\right\| = AB$ puis $2MI = AB$ ou encore $MI = \dfrac{1}{2}AB$.
   Les points M sont donc tels que la longueur MI vaut $\dfrac{1}{2}AB$.
   Ainsi l'ensemble $\mathscr{C}$ est le cercle de centre I et de rayon $\dfrac{1}{2}AB$ (ou encore de rayon AI).
   On trace cet ensemble.



Exercice 3 : *Casino*

Partie A

1) On trace un arbre



(En Terminale, on réécrira ce type d'arbre en regroupant les branches ayant des valeurs identiques.)
Il ne nous reste plus qu'à compter le nombres de branches finales soit 5×5 c'est-à-dire qu'il y a 25 éléments dans Ω.

2) Les valeurs possibles pour X sont : $5+5-23,8$; $5+10-23,8$; $5+20-23,8$; $10+10-23,8$; $10+20-23,8$ et $20+20-23,8$ c'est-à-dire $-13,8$; $-8,8$; $-3,8$; $1,2$; $6,2$ et $16,2$.

3) Les éléments de Ω sont équiprobables donc pour déterminer la loi de probabilité de X on décompte les cas correspondants en lisant sur l'arbre . On obtient ainsi la loi de probabilité :

X	$-13,8$	$-8,8$	$-3,8$	$1,2$	$6,2$	$16,2$
$P(X)$	$\dfrac{4}{25}$	$\dfrac{4}{25}$	$\dfrac{1}{25}$	$\dfrac{8}{25}$	$\dfrac{4}{25}$	$\dfrac{4}{25}$

(On vérifie au passage que la somme des probabilités fait bien 1.)

4) On calcule l'espérance $E(X)$ de X :
$E(X) = \frac{4}{25}\times(-13,8) + \frac{4}{25}\times(-8,8) + \frac{1}{25}\times(-3,8) + \frac{8}{25}\times 1,2 + \frac{4}{25}\times 6,2 + \frac{4}{25}\times 16,2 = \frac{5}{25} = \frac{1}{5} = 0,2.$
L'espérance de X vaut 0,2 €.
On calcule l'écart-type $\sigma(X)$ de X :
$$\left(\sigma(X)\right)^2 = \frac{4}{25}\times(-13,8)^2 + \frac{4}{25}\times(-8,8)^2 + \frac{1}{25}\times(-3,8)^2 + \frac{8}{25}\times 1,2^2 + \frac{4}{25}\times 6,2^2 + \frac{4}{25}\times 16,2^2 - 0,2^2$$
$$= \frac{2301}{25} - 0,2^2 = 92.$$
L'écart-type de X vaut $\sqrt{92}$ soit environ 9,6 €.
Le jeu est intéressant du point de vue financier pour le joueur car l'espérance du gain est positive.
(Sur un grand nombre de partie le joueur peut espérer gagner en moyenne 0,2 € par partie.)

Partie B

1) On fait un tableau caractérisant le nombre d'éléments de Ω'.
Dans les lignes on met la valeur du «premier» billet et dans les colonnes on met la valeur du «second» en sachant bien que dans cette partie il n'y a pas d'ordre pour les billets.

billets	5	5	10	20	20
5	×	(5 ; 5)	(5 ; 10)	(5 ; 20)	(5 ; 20)
5	(5 ; 5)	×	(5 ; 10)	(5 ; 20)	(5 ; 20)
10	(10 ; 5)	(10 ; 5)	×	(10 ; 20)	(10 ; 20)
20	(20 ; 5)	(20 ; 5)	(20 ; 10)	×	(20 ; 20)
20	(20 ; 5)	(20 ; 5)	(20 ; 10)	(20 ; 20)	×

D'après le tableau il y a 5 éléments dans Ω' car il n'y a pas d'ordre pour ce tirage: «5 et 5», «5 et 10», «5 et 20», «10 et 20» et «20 et 20»

2) Les valeurs possibles pour Y sont : $5+5-23,8$; $5+10-23,8$; $5+20-23,8$; $10+20-23,8$ et $20+20-23,8$ c'est-à-dire $-13,8$; $-8,8$; $1,2$; $6,2$ et $16,2$.

3) Les éléments du tableau sont équiprobables donc pour déterminer la loi de probabilité de Y on décompte les cas correspondants en lisant dans le tableau . On obtient ainsi la loi de probabilité :

Y	$-13,8$	$-8,8$	$1,2$	$6,2$	$16,2$
$P(Y)$	$\frac{2}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{2}{20}$

(On vérifie au passage que la somme des probabilités fait bien 1.)

4) On calcule l'espérance $E(Y)$ de Y :
$E(Y) = \frac{2}{20}\times(-13,8) + \frac{4}{20}\times(-8,8) + \frac{8}{20}\times 1,2 + \frac{4}{20}\times 6,2 + \frac{2}{20}\times 16,2 = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0,2.$
L'espérance de Y vaut 0,2 €.
On calcule l'écart-type $\sigma(Y)$ de Y :
$$\left(\sigma(Y)\right)^2 = \frac{2}{20}\times(-13,8)^2 + \frac{4}{20}\times(-8,8)^2 + \frac{8}{20}\times 1,2^2 + \frac{4}{20}\times 6,2^2 + \frac{2}{20}\times 16,2^2 - 0,2^2 = 69.$$
L'écart-type de Y vaut $\sqrt{69}$ soit environ 8,3 €.
Là encore le jeu est intéressant du point de vue financier pour le joueur car l'espérance du gain est positive.

Attention : *ce ne sont pas deux jeux équivalents, même s'ils ont la même espérance, notamment car ils n'ont pas le même écart-type.*