Corrigé Devoir Maison 3

Exercice 1 : *Méthode de résolution de Cardan-Hudde*

1) **Etape 1**

a) On va développer l'expression $(x+a)^3+p(x+a)+q$ puis identifier les coefficients avec ceux de $x^3+3x^2+15x-99$.
On a $(x+a)^3+p(x+a)+q = x^3+3ax^2+3a^2x+a^3+px+ap+q = x^3+3ax^2+(3a^2+p)x+(ap+q+a^3)$.
Par identification il nous faut alors résoudre :
$$\begin{cases} 3a &= 3 \\ 3a^2+p &= 15 \\ ap+q+a^3 &= -99 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1 \\ 3+p &= 15 \\ p+q+1 &= -99 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1 \\ p &= 12 \\ 12+q &= -100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1 \\ p &= 12 \\ q &= -112 \end{cases}$$
Ainsi on a $x^3+3x^2+15x-99 = (x+1)^3+12(x+1)-112$ pour tout x.

b) On pose $X = x+1$, l'équation se réécrit alors $X^3+12X-112 = 0$.

2) **Etape 2**

a) On a $(u+v)^3 = u^3+3u^2v+3uv^2+v^3 = u^3+v^3+3uv(u+v)$ ce qui est la forme demandée.

b) Lorsque $X = u+v$, alors : $X^3+12X-112 = (u+v)^3+12(u+v)-112 =$
$u^3+v^3+3uv(u+v)+12(u+v)-112 = u^3+v^3+(3uv+12)(u+v)-112$.

c) S'il existe des réels u et v vérifiant (S) alors $(uv)^3 = (-4)^3$ donc $uv = -4$ et
$u^3+v^3+(3uv+12)(u+v)-112 = 112+(-12+12)(u+v)-112 = 0$ donc $u+v$ est solution de (E_1).
La fonction cube étant strictement croissante il n'existe qu'un seul x tel que $x^3 = -64$ c'est -4.

d) On pose $U = u^3$ et $V = v^3$. (S) se réecrit alors $\begin{cases} U+V = 112 \\ UV = -64 \end{cases}$.
U et V sont alors solutions de $X^2-112X-64 = 0$.
On a $\Delta = (-112)^2-4\times(-64) = 12800 = 2^9\times 5^2$ donc l'équation admet deux solutions $X_1 = \dfrac{112-\sqrt{12800}}{2} = \dfrac{112-2^4\times 5\sqrt{2}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{112+\sqrt{12800}}{2} = \dfrac{112+2^4\times 5\sqrt{2}}{2}$ c'est-à-dire $X_1 = 56-40\sqrt{2}$ et $X_2 = 56+40\sqrt{2}$.
Ainsi <u>une</u> solution est telle $U = 56-40\sqrt{2}$ et $V = 56+40\sqrt{2}$.
Il nous faut à présent déterminer u et v tels que $u^3 = 56-40\sqrt{2}$ et $v^3 = 56+40\sqrt{2}$.
On suit l'indication : $\left(2+2\sqrt{2}\right)^3 = 2^3+3\times 2\times\left(2\sqrt{2}\right)^2+3\times 2^2\times\left(2\sqrt{2}\right)+\left(2\sqrt{2}\right)^3 =$
$8+6\times 8+12\left(2\sqrt{2}\right)+16\sqrt{2} = 56+40\sqrt{2}$.
On calcule de même $\left(2-2\sqrt{2}\right)^3 = 2^3+3\times 2\times\left(2\sqrt{2}\right)^2-3\times 2^2\times\left(2\sqrt{2}\right)-\left(2\sqrt{2}\right)^3 =$
$8+6\times 8-12\left(2\sqrt{2}\right)-16\sqrt{2} = 56-40\sqrt{2}$.
On a ainsi $u = 2+2\sqrt{2}$ et $v = 2-2\sqrt{2}$

e) D'après la question 2)*b)* $X = 2-2\sqrt{2}+2+2\sqrt{2} = 4$ est <u>une</u> solution de (E_1).
On peut alors factoriser $X^3+12X-112$ par $(X-4)$:
on a $X^3+12X-112 = (X-4)(aX^2+bX+c)$ où a, b et c sont des coefficients à déterminer.

On a $X^3 + 12X - 112 = aX^3 + (b-4a)X^2 + (c-4b)X - 4c$ et donc

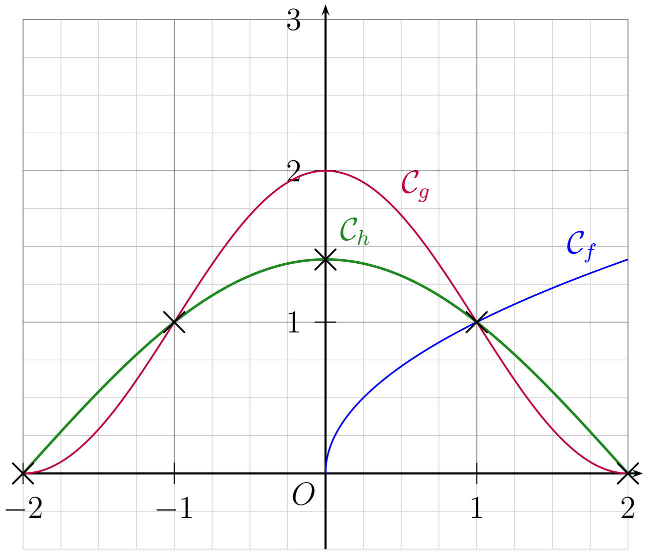
$$\begin{cases} a = 1 \\ b-4a = 0 \\ c-4b = 12 \\ -4c = -112 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b-4 = 0 \\ c-4b = 12 \\ c = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 28 \\ c = 28 \end{cases} \text{ et donc}$$

$X^3+12X-112 = (X-4)(X^2+4X+28)$. Il ne nous reste plus qu'à déterminer les racines de $X^2+4X+28$. On a $\Delta = 16 - 4\times 28 = -96$ et donc ce trinôme n'a pas de racines et ainsi l'équation (E_1) n'admet qu'une seule solution $X = 4$.

3) D'après la question 1)*b)* il n'y a qu'une solution à l'équation (E) c'est x tel que $x+1 = 4$ c'est-à-dire $x = 3$.

Exercice 2 : *Composition*

1) On lit sur le graphique les ensembles de définition : $I = [0\,;2]$ et $J = [-2\,;2]$.
2) Lorsque x est dans I $f(x)$ est dans $[0\,;1,4]$ environ et lorsque x est dans J $g(x)$ est dans $[0\,;2]$.
3) Pour que $h = f\circ g$ soit bien définie sur $[-2;2]$ il faut et il suffit que tous les $g(x)$ soient dans I ce qui est le cas d'après la question précédente.
4) On construit sur le graphique de l'énoncé les points de $\mathcal{C}_h$ d'abscisses -2; -1; 0; 1 et 2 qu'on représente par des croix noires.
On a $g(-2) = 0$ et $f(0) = 0$ donc $h(-2) = 0$.
On a $g(-1) = 1$ et $f(1) = 1$ donc $h(-1) = 1$.
On a $g(0) = 2$ et $f(2) \approx 1,4$ donc $h(0) \approx 1,4$.
On a $g(1) = 1$ et $f(1) = 1$ donc $h(1) = 1$.
Enfin on a $g(2) = 0$ et $f(0) = 0$ donc $h(2) = 0$.



5) Sur $[-2;0]$ la fonction g est croissante et la fonction f est croissante sur J donc par composition la fonction h est croissante sur $[-2;0]$.
Sur $[0;2]$ la fonction g est décroissante et la fonction f est croissante sur J donc par composition la fonction h est décroissante sur $[0;2]$.
6) On trace $\mathcal{C}_h$ sur le graphique de la question 4).

Exercice 3 : *Dans l'espace...*

1) Dans le triangle BCD puisque L est le milieu de $[BC]$ et K celui de $[BD]$ d'après le théorème de la droite des milieux $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$. On peut appliquer de même ce théorème au triangle ACD et il en résulte que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ et donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ et ainsi le quadrilatère $IJKL$ est un parallèlogramme.
On peut exactement appliquer ce raisonnement aux vecteurs $\overrightarrow{MJ}$ et $\overrightarrow{LN}$ d'une part et aux

vecteurs $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{KN}$ d'autre part. Il en résulte donc que $MJNL$ et $MINK$ sont des parallélogrammes.
Le centre de $IJKL$ est le milieu de $[IK]$ qui est une diagonale et c'est aussi une diagonale de $MINK$ donc ces deux parallélogrammes ont même centre.
Le centre de $MJNL$ est le milieu de $[JL]$ qui est une diagonale et c'est aussi une diagonale de $IJKL$ donc ces deux parallélogrammes ont même centre.
Ces trois parallélogrammes ont donc même centre.

2) On a $G = \text{bar}\{(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)\}$ et d'après l'énoncé $I = \text{bar}\{(A,1),(C,1)\}$ et $K = \text{bar}\{(B,1),(D,1)\}$ donc d'après le théorème du barycentre partiel $G = \text{bar}\{(I,1+1),(K,1+1)\}$ c'est-à-dire que G est le milieu de $[IK]$.
De même $J = \text{bar}\{(A,1),(D,1)\}$ et $L = \text{bar}\{(B,1),(C,1)\}$ donc d'après le théorème du barycentre partiel $G = \text{bar}\{(J,1+1),(L,1+1)\}$ c'est-à-dire que G est le milieu de $[JL]$.
De même $M = \text{bar}\{(A,1),(B,1)\}$ et $N = \text{bar}\{(C,1),(D,1)\}$ donc d'après le théorème du barycentre partiel $G = \text{bar}\{(M,1+1),(N,1+1)\}$ c'est-à-dire que G est le milieu de $[MN]$.
Donc G est bien le milieu commun des segments $[IK]$, $[JL]$ et $[MN]$.

3) On a $A' = \text{bar}\{(B,1),(C,1),(D,1)\}$ donc d'après le théorème du barycentre partiel $G = \text{bar}\{(A,1),(A',1+1+1)\}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{GA} + 3\,\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{0}$ puis $\overrightarrow{GA} + 3\,\overrightarrow{GA} + 3\,\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{0}$ et donc $\overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{4}\,\overrightarrow{AA'}$.
On trace la figure avec les points A' et G à titre d'illustration.